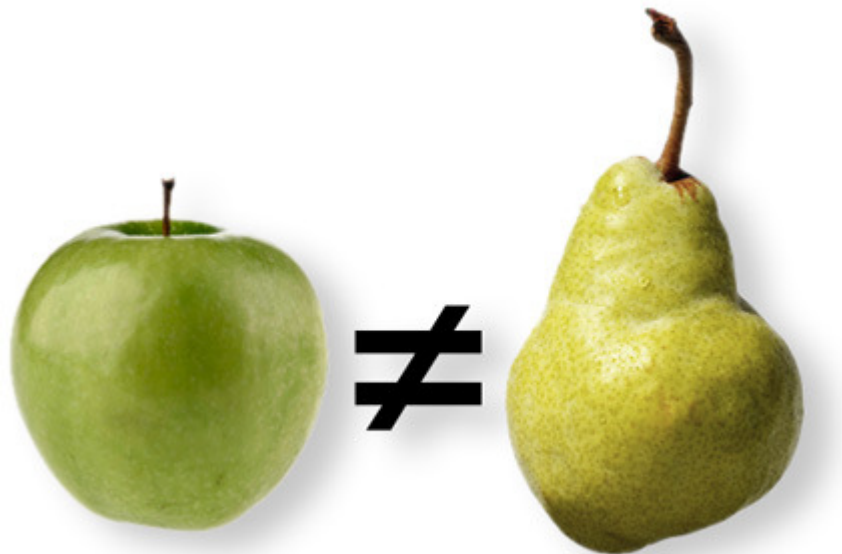


Prof. Dr. Alfred Toth

# Äpfel und Birnen

Studien zu einer semiotischen Mathematik

Bd. 2: Spuren



München 2010

Die Leere - das Selbst ohne das Selbst - ist die Liquidierung des Abenteuers des "Ich", es ist das Sein ohne jede Spur von Sein, ein seliges Untergehen, eine unvergleichliche Katastrophe.

*Emile M. Cioran, Die verfehlte Schöpfung (1969)*

# Inhalt



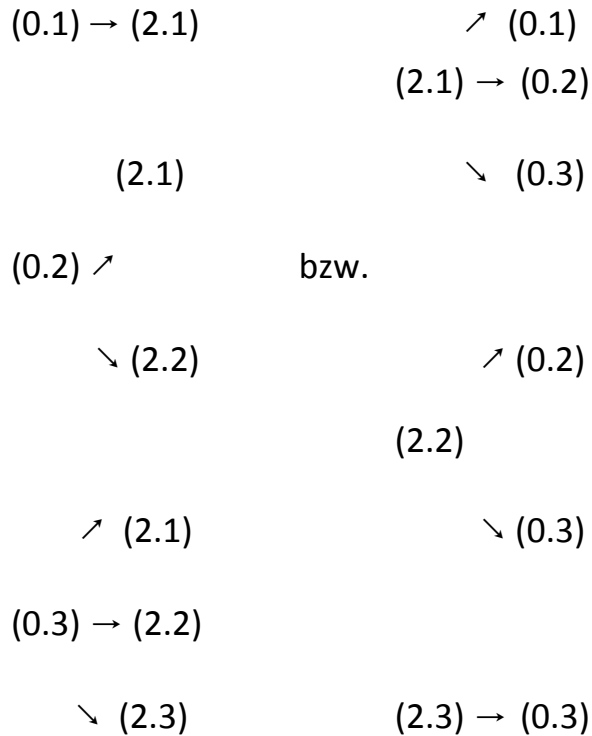
## 1. Grundlegung einer semiotischen Spuretheorie

1. Ein vorgegebenes Objekt wird entweder natürlich im Sinne eines interpretierten Anzeichens oder künstlich durch thetische Einführung durch einen Zeichensetzer dadurch in ein Meta-Objekt (Bense 1967, S. 8) transformiert, dass es durch ein Mittel bezeichnet und hierdurch in ein kategoriales Objekt (Bense 1975, S. 65 f.) verwandelt wird. Das das vorgegebene und im Rahmen der Semiose disponible Objekt (Bense 1975, S. 45) substituierende Mittel ist dadurch eingeschränkt, dass schon das vorgegebene Objekt für das es seligierende Bewusstsein eines Interpretanten oder Zeichensetzers hinsichtlich Sekanz (0.1), Semanz (0.2) und Selektanz (0.3) präterminiert ist (vgl. Götz 1982, S. 28), d.h. das disponible Objekt lässt im kategorialen Objekt, "filtriert" durch die präsemiotische Trichotomie von Sekanz, Semanz und Selektanz, seine "Spuren" zurück, wodurch das Objekt also als Spur bzw. kategoriales Objekt Teil der Präzeichen-Relation wird. Im Sinne der Saussureschen Semiotik bedeutet das, dass das Signifikat als Spur im Signifikanten präsent ist, eine Theorie, die völlig unabhängig von der Peirce-Benseschen Semiotik und der auf ihr aufbauenden mathematischen und polykontexturalen Semiotik von Derrida behauptet wurde: "Dass das Signifikat ursprünglich und wesensmässig (...) Spur ist, dass es sich *immer schon in der Position des Signifikanten befindet* – das ist der scheinbar unschuldige Satz, in dem die Metaphysik des Logos, der Präsenz und des Bewusstseins die Schrift als ihren Tod und ihre Quelle reflektieren muss" (1983, S. 129).

2. Da die präsemiotische Trichotomie (0.1), (0.2), (0.3) in ihrer abstrakten Form

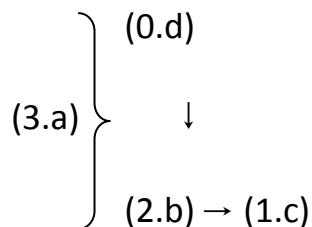
(0.a), (2.b), (1.c) mit  $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$  und  $a \leq b \leq c$

auf die semiotischen Trichotomien vererbt wird (vgl. Toth 2008, Bd. 2, S. 14 ff.), ergeben sich die folgenden ordnungstheoretischen Kombinationen von kategorialen Objekten und kategorial-relationalen Objektbezügen:



Diese sind also die abstrakten präsemiotisch-semiotischen Schemata der Spuren-Vererbung von kategorialen Objekte auf Objektbezüge.

3. Offenbar wirken diese präsemiotisch-semiotischen Spuren in doppelter Weise: Erstens in der soeben aufgezeigten Weise von den disponiblen Objekten über die kategorialen Objekte auf die semiotischen Objektbezüge, andererseits aber ebenfalls auf die semiotischen Mittel, mit welchen die disponiblen Objekte bezeichnet werden, d.h. wir müssen von dem folgenden Präzeichen-Schema ausgehen:



Hiermit soll also ausgedrückt werden, dass die präsemiotische Spur zunächst auf den semiotischen Objektbezug und dann auf das semiotische Mittel vererbt wird, wobei dieser Vererbungsprozess unter der Auspiz eines interpretierenden (natürliche Zeichen) oder thetischen (künstliche Zeichen) Bewusstseins stattfindet. In Abwandlung der von Bense (1979, S. 82) benutzten kreationstheoretischen Schreibung können wir das obige Schema also wie folgt vereinfachen und präzisieren:

(0.d)

(3.a)  $\gg \Upsilon \succ (1.c)$

(2.b)

Damit können die 15 präsemiotischen Zeichenklassen als Basis einer semiotischen Spuretheorie wie folgt notiert werden:

1 (0.1)

(3.1)  $\gg \Upsilon \succ (1.1)$

(2.1)

2 (0.2)

(3.1)  $\gg \Upsilon \succ (1.1)$

(2.1)

3 (0.3)

(3.1)  $\gg \Upsilon \succ (1.1)$

(2.1)

4 (0.2)

(3.1)  $\gg \Upsilon \succ (1.2)$

(2.1)

5 (0.3)

(3.1)  $\gg \Upsilon \succ (1.2)$

(2.1)

6 (0.3)

(3.1)  $\gg \Upsilon \succ (1.3)$

(2.1)

7 (0.2)

(3.1)  $\gg \Upsilon \succ (1.2)$

(2.2)

8 (0.3)

(3.1)  $\gg \Upsilon \succ (1.2)$

(2.2)

9 (0.3)

(3.1)  $\gg \Upsilon \succ (1.3)$

(2.2)



10 (0.3)

(3.1)  $\gg \Upsilon \succ (1.3)$

(2.3)

11 (0.2)

(3.2)  $\gg \Upsilon \succ (1.2)$

(2.2)

12 (0.3)

(3.2)  $\gg \Upsilon \succ (1.2)$

(2.2)

13 (0.3)

(3.2)  $\gg \Upsilon \succ (1.3)$

(2.2)

14 (0.3)

(3.2)  $\gg \Upsilon \succ (1.3)$

(2.3)

15 (0.3)

(3.3)  $\gg \vee \succ$  (1.3)

(2.3)

Es stellt sich heraus, dass Photos, gemalte Porträtbilder, lautmalende Wörter<sup>1</sup> u.ä., welche die Spuren ihrer repräsentierten Objekte "sichtbar" in den Zeichen festhalten, lediglich Spezialfälle von präsemiotischer-semiotischer Spuren-erhaltung im Sinne der Aufhebung der Kontexturgrenze zwischen Zeichen und Objekten innerhalb der Präsemiotik sind. Spuren können gar nicht verloren gehen, denn sie sind durch die Vererbung der präsemiotischen Trichotomie von Sekanz, Semanz und Selektanz in die semiotischen Trichotomien garantiert. Diese formale Tatsache, die wir hier anhand von beiden präsemiotischen Spuren, nämlich der Vererbung kategorialer Objekte einerseits und zuerst auf die semiotischen Objektbezüge und andererseits und zweitens auf die semiotischen Mittelbezüge, aufgezeigt haben, geht zusammen mit umgangssprachlichen Wendungen wie "auf der Spurensuche von jdm. sein", wo man also im Grunde davon überzeugt ist, dass das Haus, in dem etwa Goethe gewohnt hatte, noch heute seinen "Geist", "Schatten" oder seine "Aura" beherbergt, dass eine Buchausgabe, die Goethe noch in seinen Händen hielt, "inspiratorisch" wirkt, dass man "in jds. Fusstapfen" tritt, was ja nicht wörtlich, d.h. semiotisch, sondern im Sinne einer präsemiotischen Spur zu verstehen ist, wofür man etwa im Ungarischen sogar "nyomda", eigentlich "Abdruck" (zu nyomni "drücken"), verwendet. Und vom Geist oder Schatten einer zeitlich zurückliegenden Person bis zur Vorstellung ihrer trotz dem Tode ununterbrochenen Präsenz in einem Hause als Grundvorstellung vieler Horrorgeschichten und –filme ist es nur noch ein kleiner Schritt. Es handelt sich hier also nicht um vorrationalistische und seit der Romantik bis in unsere Zeit konservierte Relikte, sondern in Sinne der präsemiotisch-semiotischen Spurenvererbungstheorie um feste Tatsachen, die deshalb in der Mythologie und Mystik gelandet sind, weil sie zusammen mit der mit der zweiwertigen aristotelischen Logik unverträglichen Präsemiotik aus unserem rein objektiven logischen Denken, das keinen Spielraum für Polykontextualität bereit hält, ausgegrenzt wurden.

---

<sup>1</sup> Das immer noch schönste Beispiel eines ganzen „präsemiotischen“ Textes ist Franz Hohlers „Totemügerli“.

## Bibliographie

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Götz, Matthias, Schein Design. Diss. Stuttgart 1982

Toth, Alfred, Semiotics and Pre-Semiotics. 2 Bde. Klagenfurt 2008

## 2. Spuren als semiotische Transformationsklassen

1. Wir hatten bereits einen Versuch zur Erklärung von Spuren im Rahmen der Semiotik gemacht (vgl. Toth 2008), wo von Peirceschen Zeichenklassen mit inkorporierten kategorialen Objekten ausgegangen worden war. Im vorliegenden Kapitel benutze ich die in Toth (2009) eingeführten semiotisch-ontologischen Transformationsklassen.

2. Zunächst können wir im Anschluss an Benses Feststellung, dass der Zeichenträger ein „triadisches Objekt“ sei (Bense/Walther 1973, S. 71), wie in Toth (2009) gezeigt, auch den Interpreten und das ontische, durch das Zeichen bezeichnete Objekt als triadische Objekte bestimmen und erhalten auf diese Weise eine triadische Objektrelation

$$OR = (\mathcal{M}, \Omega, \mathfrak{S})$$

Der Zusammenhang zwischen OR und der Peirceschen Zeichenrelation ZR ergibt sich durch Korrelation

$$OR = (\mathcal{M}, \Omega, \mathfrak{S})$$

$$\begin{array}{ccc} \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \end{array}$$

$$ZR = (M, O, I).$$

OR ist eine ontologische Relation, und weil jedes ihrer drei Objekte selbst triadisch ist, können wir die Trichotomien wie folgt bestimmen

$$m = \{mm, m\Omega, m\mathfrak{S}\}$$

$$\Omega = \{\Omega m, \Omega\Omega, \Omega\mathfrak{S}\}$$

$$\mathfrak{S} = \{\mathfrak{S}m, \mathfrak{S}\Omega, \mathfrak{S}\mathfrak{S}\}$$

Wiederum durch Korrelation zwischen den Trichotomien von OR und den bekannten Trichotomien von ZR haben wir

$$\begin{pmatrix} mm & m\Omega & m\mathfrak{S} \\ \Omega m & \Omega\Omega & \Omega\mathfrak{S} \\ \mathfrak{S}m & \mathfrak{S}\Omega & \mathfrak{S}\mathfrak{S} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{pmatrix}$$

Zwischen der linken, ontologischen Matrix und der rechten, semiotischen Matrix können nun zwei Transformationsmatrizen, eine ontologisch-semiotische (links) sowie eine semiotisch-ontologische (rechts), angesetzt werden:

$$\begin{pmatrix} 11 & 12 & 13 \\ 21 & 22 & 23 \\ 31 & 32 & 33 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1.1 & 1.2 & 1.3 \\ 2.1 & 2.2 & 2.3 \\ 3.1 & 3.2 & 3.3 \end{pmatrix}$$

Über ZR konstruierte Zeichenklassen haben bekanntlich die Form

$$ZR = (3.a \ 2.b \ 1.c) \text{ mit } a, b, c \in \{.1, .2, .3\} \text{ und } a \leq b \leq c.$$

Eine einfache Überlegung lehrt uns, dass die inklusive Ordnung für über OR konstruierte Objektklassen nicht gelten kann, da Objekte nicht wie relationale Zeichen ineinander verschachtelt sind. Damit bekommen wir also für die 10 Peirceschen Zeichenklassen  $3^3 = 27$  Objektklassen, 27 Zeichen/Objektklassen, jedoch wiederum 10 Zeichen/Objektklassen der folgenden Formen, die wir Transformationsklassen nennen wollen:

TK1 = (3.a 2.b 1.c) mit  $a, b, c \in \{.1, .2, .3\}$  und  $a \leq b \leq c$

TK2 = (3.a 2.b 1.c) mit  $a, b, c \in \{.1, .2, .3\}$ ,

wobei also mit  $a \leq b \leq c$ .

Die über TK1 und TK2 konstruierbaren total 37 Zeichenklassen und ihre dualen Realitätsthematiken sind also die „Interface-Klassen“ sozusagen auf halbem Weg zwischen Zeichen und Objekten. Dies dürfte mit der üblichen Intention von „Spuren“ sich decken. Ich bringe als Beispiel die folgende Passage aus dem letzten, unvollendeten Roman von Heimito von Doderer, „Der Grenzwald“:

Im Frühjahr, da dunsten die alten Gassen richtig auf. Man glaubt wahrlich, über tiefe Höhlungen voll längst vergangener Gerüche auf dem schmalen Stege einer Gegenwart zu schreiten. Es gibt auch hier eine – Durchsichtigkeit in einst gewesenen Duft oder Dunst, aber man sieht eben nicht, sondern man riecht. Man riecht durch bis in die Tiefe der Zeiten, und man sieht’s unmittelbar ein, dass es dort so hatte riechen müssen, und dass man dazugehörte (von Doderer 1967, S. 174).

Es dürfte klar sein, dass Spuren sich sämtlicher Kanäle zur Manifestation bedienen wie Zeichen. Vermutlich stimmen auch die Klassifikationsversuche für Zeichen generell mit denjenigen von Spuren überein.

In Ergänzung zu TK1 und TK2 kann man sich überlegen, transitorische Hybridklassen z.B. der folgenden Formen herzustellen:

TK(H1) = (3.a 2.b 1.c)

TK(H2) = (3.a 2.b 1.c), usw.

In beiden Hybridklassen stammen also sowohl die triadischen Haupt- als auch die trichotomischen Stellenwerte aus Repertories, die selbst hybride sind, oder aber sie müssen aus zwei verschiedenen Repertoires selektiert werden.

Den Transit. und Hybridklassen ist somit gemein, dass sie erkenntnistheoretisch und metapyhsisch im intermediären „Niemandland“ zwischen Zeichen und Objekt bzw. semiotischem und ontologischem Raum (vgl. Bense 1975, S. 65 f.) angesiedelt sind. Dort liegen die Spuren, denn diese sind erst auf der von allem Materialien befreiten Zeichenebene zu finden. Da Zeichen schon wegen ihres notwendig materialen Zeichenträgers immer in der realen Objektwelt verankert sind, haben wir hier sozusagen mit dem ontologischen Korrelat  $M$  von  $M$  auch die ontologischen Korrelate von  $O$  und  $I$ , d.h.  $\Omega$  und  $\mathcal{J}$  in die Objektwelt „hinunter“ gezogen. Somit sind „gemischte“ Repräsentationsklassen, deren triadische und/oder trichotomische Glieder jeweils einer der beiden Räume angehören, „Anker“, welche diese transitorischen Klassen gleichzeitig „unten“ in der Objektwelt und „oben“ in der Zeichenwelt verankern. Sie sind also gleichzeitig im Sein und im Bewusstsein fundiert und entsprechen damit der landläufigen Vorstellung von Spuren als „Resten“ oder „Überbleibseln“ verstorbener Personen, abgebrochener Häuser, ja sogar, wie das von Doderer-Zitat belegt, von Gerüchen. Es gäbe wohl kaum die Scharen von Touristen, die alljährlich in die Geburtshäuser von Goethe, Schiller oder Nietzsche pilgern, wenn man sich nicht erhoffte, dort noch ein Quant des Odems dieser Berühmtheiten zu erhaschen. (Von den Wallfahrtsorten mit Marienerscheinungen und dgl. ganz zu schweigen.) Auch der kirchliche Reliquien-Kult hat in der Auffassung von Spuren als Verbindungsstücken zwischen einer temporal und/oder lokal nicht mehr präsenten Realität ihre Wurzel. Die hier eingeführten Transitionsklassen einerseits und die aus ihnen zusammengesetzten Hybridklassen andererseits stellen somit eine präzise Formalisierung und Entmythologisierung dieser Form des Denkens und Glaubens dar.

## **Bibliographie**

Bense, Max/Walther, Elisabeth, Wörterbuch der Semiotik. Köln 1973

Toth, Alfred, Grundlegung einer semiotischen Spuretheorie. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2008

Toth, Alfred, Das Zeichen als Fragment. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009

von Doderer, Heimito, Der Grenzwald. München 1967

### 3. Spuren und Keime

1. In Heimito von Doderers „Der Grenzwald“ (München 1967) gibt es die folgende Stelle: „Im Frühjahr, da dunsten die alten Gassen richtig auf. Man glaubt wahrlich, über tiefe Höhlungen voll längst vergangener Gerüche auf dem schmalen Stege einer Gegenwart zu schreiten. Es gibt auch hier eine – Durchsichtigkeit in einst gewesenen Duft oder Dunst, aber man sieht eben nicht, sondern man riecht. Man riecht durch bis in die Tiefe der Zeiten, und man sieht’s unmittelbar ein, dass es dort so hatte riechen müssen, und dass man dazugehörte“ (1967, S. 174).

2. Aufgabe der Archäologie ist es z.B., aufgrund von Resten auf die Zivilisation früherer Zeiten zu schliessen, d.h. von den in unserer Zeit zurückgelassenen **Spuren** frühere kulturelle Objekte nach Möglichkeit zu rekonstruieren. Dies funktioniert natürlich nur dann, wenn die Spuren in irgendeiner semiotischen Beziehung zum früheren Objekt stehen, denn mittels der bedeutungs- und sinnfreien Logik können natürlich keine kommunikativen Objekte, Strukturen und Systeme wiederhergestellt werden. Andererseits wäre ein solcher Versuch von Anfang an aussichtslos, wenn es keine Spuren gäbe oder frühere Spuren verwischt wären. Beispiele sind Burgruinen, in denen anhand von Mauerresten Standort und Funktion früherer Gebäude rekonstruiert werden, z.B. den Bergfried, Ökonomiegebäude, Küchen, Lagerräume, Wohnräume, usw. Semiotisch gesehen, sind Spuren also eine besondere Form von Zeichen, die in einer pars-pro-toto-Relation zu einem zeitlich zurückliegenden Referenzobjekt liegen. Wir können dies wie folgt formal ausdrücken:

Spur =  $(m_2, M, O, I) \rightarrow OR = (m_1, \Omega_1, \mathcal{J}_1)$ .

Da der moderne Zeichenträger, d.h. die eigentliche materiale Spur, aber vermöge der pars-pro-toto-Relation ein Teil des Objektes ist, gilt ferner

$$m_2 \subset \Omega_1.$$

Da  $m_1$  selbst ein Teil des Kulturobjektes ist, z.B. ein Teil des Steines eines Hauses, muss natürlich ebenfalls gelten

$$m_1 \subset \Omega_1,$$

und wir haben somit

$$m_2 \subset m_1 \subset \Omega_1.$$

In einem weiteren Schritt (vgl. Toth 2009) können wir nun die Partialrelationen der Spuren-Relation in der Form von ungeordneten Mengen über geordneten Teilmengen notieren, d.h. wir formen

$$\text{Spur} = (m_2, M, O, I) \rightarrow \text{OR} = (m_1, \Omega_1, \mathcal{J}_1)$$

zu

$$\text{Spur} = \{ \langle M, (m_2 \subset m_1) \rangle, \langle O, \Omega_1 \rangle, \langle I, \mathcal{J}_1 \rangle \},$$

um, was somit semiotisch äquivalent ist mit

$$\text{Spur} = \{ M, \langle O, (m_2 \subset m_1 \subset \Omega_1) \rangle, \langle I, \mathcal{J}_1 \rangle \}.$$

Ferner muss  $I$  natürlich eine Teilmenge von  $\mathcal{J}$  sein, da nur eine Teilmenge des Bewusstseins eines Interpreten an den Zeichenkonnex abgegeben kann (ansonsten müsste man mindestens 2 Ontologien annehmen, ferner würde dann die Zeichenrelation der Spur nicht mit der Objektrelation des ehemaligen Objekts übereinstimmen, d.h. in beiden Fällen wäre eine Rekonstruktion gar nicht möglich, d.h. es würde dann auch keine Spur vorliegen):

$$I \subset \mathcal{J}_1.$$



Allerdings können wir noch einen beträchtlichen Schritt weitergehen, denn auch  $M$  und  $O$  sind Teile von  $\mathcal{M}$  und  $\Omega$ , denn sie sind ja deren Reste, und zwar zuerst von  $\mathcal{M}_1$  und dann von  $\mathcal{M}_2$ , d.h. wir haben nun

$$\text{Spur} = \{\mathcal{M}_2 \subset M \subset \mathcal{M}_1 \subset O \subset \Omega_1\}, (I \subset \mathcal{I}_1).$$

Dieser Ausdruck besagt also, dass zur Rekonstruktion des einstigen Objektes der gegenwärtige Zeichenträger  $\mathcal{M}_2$  und der in der Spur enthaltene Zeichenkonnex ( $I \subset \mathcal{I}_1$ ) ausreichend sind, oder noch einfacher gesagt, dass es möglich ist, den früheren Zustand eines Objektes aus seiner gegenwärtigen zeichenhaften Spur zu rekonstruieren.

3. **Keime** nenne ich Spuren, bei denen der Zeitpfeil invertiert ist. Ein Keim ist also eine in die Zukunft statt in die Vergangenheit weisende Spur, die es z.B. beim früheren Zustande des im folgenden abgebildeten Eckhauses Minervastrasse 149/Hegibachplatz in 8008 Zürich mir vor dem 4.1.2001, da ich Zürich verlassen hatte, möglich gemacht hätte, zu erkennen, dass dort, wo einst eine Eckkneipe (schweizerdeutsch „gutbürgerliches Restaurant“ geheissen) war und wo ich jeden vorbeispazierte auf dem Weg in meine Stammkneipe, mehr als 8 Jahre später, am 30. Mai 2009, ein von mir jahrelang in der ganzen Schweiz vermischer ungarischer Spezialitätenladen eröffnen würde:



Wie man Spuren formalisiert, welche frühere Objekte in der gegenwärtigen Zeit zurückgelassen haben, das haben wir soeben gezeigt. Aber wie formalisiert man Keime? Bense (1975, S. 45 f., 65 f.) hatte die “disponiblen” oder kategorialen Mittel sowie Objekte eingeführt. Sie bilden zusammen mit den disponiblen Interpretanten eine von mir präsemiotisch genannte Zwischenstufe zwischen dem “ontologischen” und dem “semiotischen Raum” (vgl. Toth 2008):

$$\text{PZR} = (M^\circ, O^\circ, I^\circ)$$

Vom Standpunkt der Gegenwart aus und mit Blick in die Zukunft ist also eine Objektrelation als eine disponible präsemiotische Relation aufzufassen. Wir können nun zwar natürlich nicht in die Zukunft erinnern, aber wir können durch die Transformation der ontologischen in ihre korrelativen präsemiotischen Kategorien die Keime künftiger Entwicklung dadurch erkennen, dass wir die präsemiotischen Kategorien an die Stelle der ontologischen Kategorien in der Spuren-Relation einsetzen und gleichzeitig die zeitlich intendierte Indizierung der Kategorien bzw. Partialrelation umkehren. Dann erhalten wir als Definition von Keimen:

$$\text{Keim} = \{ \langle (M^\circ_1 \subset M \subset M^\circ_2) \subset O \subset O^\circ_1 \rangle, (I \subset I^\circ_2) \}.$$

Dieser Ausdruck besagt nun, dass die disponiblen Mittel der Zukunft  $M^\circ$  ( $t = 2$ ) aus den disponiblen Mitteln der Gegenwart ( $M^\circ_1$ ) erkennbar sind, und zwar so, dass sie eine Teilmenge des inneren Objektes bilden, das seinerseits eine Teilmenge der realen Objektes der Gegenwart, d.h.  $O^\circ_1$ , ist. Ferner benötigen wir zur "Prä-Konstruktion" des zukünftigen Interpretanten ( $I^\circ_2$ ) lediglich den Interpretanten des Keims, d.h. der Spur, die in die Gegenwart weist und die wir somit an realen Objekten in der Form von Zeichen ablesen können.

### **Bibliographie**

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Toth, Alfred, Semiotics and Pre-Semiotics. 2 Bde. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Mittelrepertorie, Objektbereich und Interpretantenfeld. In:  
Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009

von Doderer, Heimito, Der Grenzwald. München 1967

### **4. Gerichtete Objekte**

1. Die Idee, gerichtete Objekte zu konstruieren wurde durch das Kapitel „Der gerichtete Raum“ in Joedicke (1985, S. 84 ff.) inspiriert. Ein gerichteter Graph ist ein Graph, dessen Linien durch Pfeile ersetzt werden. Eigentlich sollte schon von hierher die Idee, die Richtung von Zeichen- und Realitätsrelationen einzuführen, auf der Hand gelegen haben. Zeichenklassen sind z.B. als „semiotische Diamanten“ gerichtet (vgl. Toth 2008, S. 177 ff.), d.h. es handelt sich um gerichtete Mengen von Relationen, denn jede Zeichenklasse der Form

Zkl = (3.a 2.b 1.c)

lässt 6 Permutationen zu, bei denen je 2 Transpositionen „gerichtet“ sind:

(3.a 2.b 1.c)

(3.a 1.c 2.b)

(2.b 3.a 1.c)

(2.b 1.c 3.a)

(1.c 3.a 2.b)

(1.c 2.b 3.a),

wobei die Richtungen folgendermassen dargestellt werden können:

(	3.a	← (2.b 1.c)	(c.1 b.2) →	a.3	)
(	3.a	← (1.c 2.b)	(b.2 c.1) →	a.3	)
(	2.b	← (3.a 1.c)	(c.1 a.3) →	b.2	)
(	2.b	← (1.c 3.a)	(a.3 c.1) →	b.2	)
(	1.c	← (3.a 2.b)	(b.2 a.3) →	c.1	)
(	1.c	← (2.b 3.a)	(a.3 b.2) →	c.1	)

Zu jeder dieser 6 durch die Permutation der Relationenmengen induzierten Richtungen gibt es jedoch, wie in Toth (2009a) gezeigt, nochmals 8 Richtungskombinationen:

[3→a 2→b 1→c]                      [c←1 b←2 a←3]

[3→a 2→b 1←c]                      [c←1 b←2 a→3]

[3→a 2←b 1→c]                      [c←1 b→2 a←3]

[3←a 2→b 1→c]                      [c→1 b←2 a←3]

[3→a 2←b 1←c]                      [c←1 b→2 a→3]

$$[3 \leftarrow a \ 2 \leftarrow b \ 1 \rightarrow c] \quad [c \rightarrow 1 \ b \rightarrow 2 \ a \leftarrow 3]$$

$$[3 \leftarrow a \ 2 \rightarrow b \ 1 \leftarrow c] \quad [c \rightarrow 1 \ b \leftarrow 2 \ a \rightarrow 3]$$

$$[3 \leftarrow a \ 2 \leftarrow b \ 1 \leftarrow c] \quad [c \rightarrow 1 \ b \rightarrow 2 \ a \rightarrow 3],$$

welche durch die Domänen und Codomänen der Objekte der Abbildungen induziert sind, d.h. jede Zeichenklasse und jede Realitätsthematiken kann als je 48 gerichtete Zeichenrelationen dargestellt werden.

2. Dies gilt selbstredend auch, wenn man von

$$\text{OR} = (\mathcal{M}, \Omega, \mathcal{J})$$

ausgeht und zuerst die 6 Permutationen der kategorialen Relationen

$$(\mathcal{J}.a \ \Omega.b \ \mathcal{M}.c)$$

$$(\mathcal{J}.a \ \mathcal{M}.c \ \Omega.b)$$

$$(\Omega.b \ \mathcal{J}.a \ \mathcal{M}.c)$$

$$(\Omega.b \ \mathcal{M}.c \ \mathcal{J}.a)$$

$$(\mathcal{M}.c \ \mathcal{J}.a \ \Omega.b)$$

$$(\mathcal{M}.c \ \Omega.b \ \mathcal{J}.a)$$

und hernach die je 8 Permutationen der kategorialen Morphismen bildet:

$$[\mathcal{J} \rightarrow a \ \Omega \rightarrow b \ \mathcal{M} \rightarrow c] \quad [c \leftarrow 1 \ b \leftarrow \Omega \ \mathcal{M} \leftarrow \mathcal{J}]$$

$$[\mathcal{J} \rightarrow a \ \Omega \rightarrow b \ \mathcal{M} \leftarrow c] \quad [c \leftarrow 1 \ b \leftarrow \Omega \ \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{J}]$$

$$[\mathcal{J} \rightarrow a \ \Omega \leftarrow b \ \mathcal{M} \rightarrow c] \quad [c \leftarrow 1 \ b \rightarrow \Omega \ \mathcal{M} \leftarrow \mathcal{J}]$$

$$[\mathcal{J} \leftarrow a \ \Omega \rightarrow b \ \mathcal{M} \rightarrow c] \quad [c \rightarrow 1 \ b \leftarrow \Omega \ \mathcal{M} \leftarrow \mathcal{J}]$$

$$[\mathcal{J} \rightarrow a \quad \Omega \leftarrow b \quad \mathcal{M} \leftarrow c] \quad [c \leftarrow 1 \quad b \rightarrow \Omega \quad \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{J}]$$

$$[\mathcal{J} \leftarrow a \quad \Omega \leftarrow b \quad \mathcal{M} \rightarrow c] \quad [c \rightarrow 1 \quad b \rightarrow \Omega \quad \mathcal{M} \leftarrow \mathcal{J}]$$

$$[\mathcal{J} \leftarrow a \quad \Omega \rightarrow b \quad \mathcal{M} \leftarrow c] \quad [c \rightarrow 1 \quad b \leftarrow \Omega \quad \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{J}]$$

$$[\mathcal{J} \leftarrow a \quad \Omega \leftarrow b \quad \mathcal{M} \leftarrow c] \quad [c \rightarrow 1 \quad b \rightarrow \Omega \quad \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{J}]$$

Da nun fast kein Unterschied besteht zwischen einem Objekt und einem Raum, da wenigstens in der Topologie jedes Objekt dadurch zu einem topologischen Raum gemacht werden kann, indem seine Menge als Umgebung zu ihm als Element gebildet wird, d.h.

Sem. Raum = U(sem. Obj..)

bzw.

$$SR = \{\mathcal{M}, \Omega, \mathcal{J}\},$$

sind also sämtliche obigen gerichteten Objektstrukturen zugleich Modelle für gerichtete Räume.

3. Hier ist allerdings noch ein „Detail“ zu bedenken. Wie bekannt, gibt es 2 Typen semiotischer Objekte: die Zeichenobjekte

$$ZO = \langle \mathcal{M}, \mathcal{M} \rangle, \langle \mathcal{O}, \Omega \rangle, \langle \mathcal{I}, \mathcal{J} \rangle$$

und die Objektzeichen.

$$OZ = \langle \mathcal{M}, \mathcal{M} \rangle, \langle \Omega, \mathcal{O} \rangle, \langle \mathcal{J}, \mathcal{I} \rangle.$$

Die Beziehung beider ist nun derart, dass gilt (vgl. Toth 2009b)

$$\times(ZO) = U(OZ)$$

$$\times(OZ) = U(ZO),$$

d.h. wir brauchen nur die gerichteten Räume für eines der beiden semiotischen Objekte zu konstruieren und gewinnen dadurch durch einfache Dualisation die gerichteten Räume für das andere semiotische Objekt.

Gehen wir also aus von OZ, so haben wir

$$\langle \mathcal{M} \mathcal{J} \mathcal{M} \rangle, \langle \Omega \mathcal{J} \mathcal{O} \rangle, \langle \mathcal{J} \mathcal{J} \mathcal{I} \rangle$$

$$\langle \mathcal{M} \mathcal{J} \mathcal{M} \rangle, \langle \mathcal{J} \mathcal{J} \mathcal{I} \rangle, \langle \Omega \mathcal{J} \mathcal{O} \rangle$$

$$\langle \Omega \mathcal{J} \mathcal{O} \rangle, \langle \mathcal{M} \mathcal{J} \mathcal{M} \rangle, \langle \mathcal{J} \mathcal{J} \mathcal{I} \rangle$$

$$\langle \Omega \mathcal{J} \mathcal{O} \rangle, \langle \mathcal{J} \mathcal{J} \mathcal{I} \rangle, \langle \mathcal{M} \mathcal{J} \mathcal{M} \rangle$$

$$\langle \mathcal{J} \mathcal{J} \mathcal{I} \rangle, \langle \mathcal{M} \mathcal{J} \mathcal{M} \rangle, \langle \Omega \mathcal{J} \mathcal{O} \rangle$$

$$\langle \mathcal{J} \mathcal{J} \mathcal{I} \rangle, \langle \Omega \mathcal{J} \mathcal{O} \rangle, \langle \mathcal{M} \mathcal{J} \mathcal{M} \rangle,$$

gehen wir jedoch von ZO, so bekommen wir

$$\langle \mathcal{M} \mathcal{J} \mathcal{M} \rangle, \langle \mathcal{O} \mathcal{J} \Omega \rangle, \langle \mathcal{I} \mathcal{J} \mathcal{J} \rangle$$

$$\langle \mathcal{M} \mathcal{J} \mathcal{M} \rangle, \langle \mathcal{I} \mathcal{J} \mathcal{J} \rangle, \langle \mathcal{O} \mathcal{J} \Omega \rangle$$

$$\langle \mathcal{O} \mathcal{J} \Omega \rangle, \langle \mathcal{M} \mathcal{J} \mathcal{M} \rangle, \langle \mathcal{I} \mathcal{J} \mathcal{J} \rangle$$

$$\langle \mathcal{O} \mathcal{J} \Omega \rangle, \langle \mathcal{I} \mathcal{J} \mathcal{J} \rangle, \langle \mathcal{M} \mathcal{J} \mathcal{M} \rangle$$

$$\langle \mathcal{I} \mathcal{J} \mathcal{J} \rangle, \langle \mathcal{M} \mathcal{J} \mathcal{M} \rangle, \langle \mathcal{O} \mathcal{J} \Omega \rangle$$

$$\langle \mathcal{I} \mathcal{J} \mathcal{J} \rangle, \langle \mathcal{O} \mathcal{J} \Omega \rangle, \langle \mathcal{M} \mathcal{J} \mathcal{M} \rangle,$$

wobei  $\mathcal{J}$  entweder für  $\rightarrow$  oder für  $\leftarrow$  steht, d.h. es gibt wiederum pro semiotisches Objekt 8 Abbildungs-Permutationen.

## Bibliographie

Joedicke, Jürgen, Raum und Form in der Architektur. Stuttgart 1985

Taut, Bruno, Die Stadtkrone. Jena 1919

Toth, Alfred, Semiotische Strukturen und Prozesse. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Objektsabbildungen In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009a

Toth, Alfred, Die Realitätsthematiken von semiotischen Objekten In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009b

## 5. Spuren der Produktion des Zeichens

1. „Das Hervorbringen von Zeichen“, sagt Eco (1977, S. 187), „ist eine Arbeit, gleichgültig, ob es sich um Wörter oder um Waren handelt. Diese Arbeit scheint für das Zeichen als Bedeutungsträger unwesentlich zu sein und nur die Struktur des Ausdrucks zu betreffen; sie müsste aber eines der Signifikate sein, die das Zeichen konnotiert, so wie das gesprochene Wort durch die Art der Aussprache die sprachlichen Merkmale des Sprechers konnotiert“ (1977, S. 186).

2. Nehmen wir an, ein bayerischer Dialektsprecher spricht einen hochdeutschen Satz. Die Merkmale der Sprache des Sprechers  $\mathcal{J}$  sind dann also als Qualitäten der sprachlichen Äusserung, d.h. in  $M$ , hörbar. Diese Form von „Konnotation“, die Eco meint, ist also eine Funktion des sprachlichen Mittelbezugs vom aussersprachlichen Interpretieren, d.h.

$$M = f(\mathcal{J})$$

oder genauer

$$M \leftrightarrow \mathcal{J}$$



Demnach ist das, was normalerweise unter Konnotation verstanden wird, d.h. die semantische Konnotation, durch

$$O \leftrightarrow \mathcal{I}$$

erfassbar, d.h., der Interpret unterlegt dem semantischen Objektbezug sozusagen eine sekundäre Bedeutung.

Ohne Probleme kann man die Triade durch

$$I \leftrightarrow \mathcal{I}$$

vervollständigen, wobei es sich hier um einen sekundären, konnotierten Sinn handelt.

3. Wenn Eco allerdings fordert, dass die Bedingungen der Entstehung von Zeichen im Zeichen selbst sichtbar bzw. wahrnehmbar sein sollen, dann bezieht er sich auf die Semiose des vollständigen „triadischen Objektes“ (Bense/Walther 1973, S. 71) zur vollständigen triadischen Zeichenrelation, d.h. auf die bilaterale Relation

$$(m, \Omega, \mathcal{I}) \rightarrow (M, O, I),$$

denn die „Arbeit“ der Zeichengenesse betrifft gleichermaßen den Zeichenträger  $m$ , das reale bezeichnete Objekt  $\Omega$  und den realen Interpreten  $\mathcal{I}$ . Genau für diesen Falle hatte Bense die semiotische Operation der „Mitführung“ eingeführt. Wenn ich ein Objekt durch ein Zeichen iconisch abbilde, haben das Objekt und das Zeichen eine gewisse Menge von Übereinstimmungsmerkmalen gleich. Diese Menge, nennen wir sie  $M$ , ist also

$$M = (\{m, \Omega, \mathcal{I}\} \setminus \{M, O, I\}) = [0, 1[,$$

d.h. ein rechtsseitig offenes Intervall, das zwar nicht den Pol der völligen Nichtübereinstimmung von Zeichen und Objekt (im Symbol), d.h.

$$M = \emptyset,$$

jedoch den Pol der völligen Übereinstimmung, d.h. die Ununterscheidbarkeit von Zeichen und bezeichnetem Objekt

$$M = 1$$

ausschliesst. Mengentheoretisch entspricht  $M$  also der Differenzmenge zwischen der Menge der Objektrelation und der Menge des Zeichens, d.h. in allen, ausser den symbolischen, Objektbezügen „führt“ das Zeichen mindestens 1 Merkmal seines Objektes „mit“. Bense sprach daher von der semiotischen Operation der „Mitführung“: „Das bedeutet jedoch, dass das (repräsentierte) Objekt als solches (also das Präsentamen) im Falle des iconischen Repräsentamen zur Repräsentationsklasse gehört, also im ‚Icon‘ mitgeführt wird und ‚Selbstgegebenheit‘ besitzen muss“ (1979, S. 44).

Diese Übereinstimmungsmerkmale werden jedoch nach Bense (1979, S. 45 f., 65 f.) über eine Zwischenstufe des Raums der disponiblen Kategorien bzw. des präsemiotischen Raumes  $\{M^\circ, O^\circ, I^\circ\}$  an die Zeichen vererbt, so dass wir folgendes vereinfachtes Merkmalsvererbungs-Schema bekommen:

$$\{M, \Omega, \mathcal{J}\} \rightarrow \{M^\circ, O^\circ, I^\circ\} \rightarrow \{M, O, I\},$$

und daher gilt

$$M \{M, \Omega, \mathcal{J}\} > M \{M^\circ, O^\circ, I^\circ\} > M \{M, O, I\}.$$

„Semiosische Arbeit“, welche das „Hervorbringen von Zeichen“ im Sinne von „Spuren der Produktion von Zeichen“ in den Zeichen selbst zurücklassen als eine Form von „Konnotation“ der ursprünglichen Objektrelation in der Zeichenrelation bedeutet also nichts anderes als kategoriale Mitführung im Sinne des letzten Schema, wobei die Semiose ein Objekt aus dem „ontologischen Raum“ über den „präsemiotischen Raum“ in den „semiotischen Raum“ (Bense 1975, S. 65 f.) abbildet und zwischen Objekt und Zeichen die Menge der Übereinstimmungsmerkmale nur im symbolischen, d.h. arbiträren Falle = 0 ist, sonst aber in einem rechtsoffenen Intervall  $[0, 1[$  angesiedelt ist, wobei die Erreichung des Wertes = 1

die völlige Übereinstimmung zwischen Zeichen und bezeichnetem Objekt bedeuten würde.

## Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max/Walther, Elisabeth, Wörterbuch der Semiotik. Köln 1973

Eco, Umberto, Zeichen. Frankfurt am Main 1977

## 6. Kategoriale Spuren

1. Nach Bense (1979, S. 53, 67) ist die Peircesche triadische Zeichenrelation

$$ZR = (.1., .2., .3.)$$

eine triadisch gestufte („verschachtelte“) Relation aus einer monadischen, einer dyadischen und einer triadischen Partialrelation

$$ZR = (.1.), (.1. \rightarrow .2.), (.1. \rightarrow .2. \rightarrow .3.) \text{ bzw.}$$
$$ZR = ((.1.), ((.1.) \rightarrow (.1. \rightarrow .2.)), (((.1.) \rightarrow (.1. \rightarrow .2.)) \rightarrow (.3.))).$$

Das bedeutet also, dass, wie bei den Peano-Zahlen, die Nachfolger der Primzeichen bestimmt und eindeutig sind. Man kann das nun aber so interpretieren, dass man  $\sigma(n)$  für  $n = 1$  und  $n = 2$  als kategoriale Spur dem jeweiligen  $(n-1)$  indiziert. Man erhält so

$$(.1.)_{(.2.)}$$
$$(.2.)_{(.3.)}$$
$$(.3.)_{(.1.)}$$

bzw.

$$ZR = ((.1.)_{(.2.)}, (.2.)_{(.3.)}, (.3.)_{(.1.)}),$$

wobei man sich die Pfeile sparen kann.

2. Mit Hilfe dieser kategorialen Spuren ergeben sich aber jeweils pro Bezug neben der richtigen Spur auch zwei falsche Spuren:

$$(.1.)_{(.1.)} / (.1.)_{(.3.)}$$

$$(.2.)_{(.1.)} / (.1.)_{(.2.)}$$

$$(.3.)_{(.2.)} / (.1.)_{(.3.)}$$

Damit treten also neben das System der 10 Peirceschen Zeichenklassen, das wir nachstehend ergänzt um die korrekten kategorialen Spuren wiedergeben:

$$(3.1)_{(.1.)} \quad (2.1)_{(.3.)} \quad (1.1)_{(.2.)}$$

$$(3.1)_{(.1.)} \quad (2.1)_{(.3.)} \quad (1.2)_{(.2.)}$$

$$(3.1)_{(.1.)} \quad (2.1)_{(.3.)} \quad (1.3)_{(.2.)}$$

$$(3.1)_{(.1.)} \quad (2.2)_{(.3.)} \quad (1.2)_{(.2.)}$$

$$(3.1)_{(.1.)} \quad (2.2)_{(.3.)} \quad (1.3)_{(.2.)}$$

$$(3.1)_{(.1.)} \quad (2.3)_{(.3.)} \quad (1.3)_{(.2.)}$$

$$(3.2)_{(.1.)} \quad (2.2)_{(.3.)} \quad (1.2)_{(.2.)}$$

$$(3.2)_{(.1.)} \quad (2.2)_{(.3.)} \quad (1.3)_{(.2.)}$$

$$(3.2)_{(.1.)} \quad (2.3)_{(.3.)} \quad (1.3)_{(.2.)}$$

$$(3.3)_{(.1.)} \quad (2.3)_{(.3.)} \quad (1.3)_{(.2.)}$$

fünf weitere Systeme zu je 10 Zeichenklassen mit den falschen kategorialen Spuren

(3.1) <sub>(.1.)</sub>	(2.1) <sub>(.2.)</sub>	(1.1) <sub>(.3.)</sub>	(3.1) <sub>(.2.)</sub>	(2.1) <sub>(.3.)</sub>	(1.1) <sub>(.1.)</sub>
(3.1) <sub>(.1.)</sub>	(2.1) <sub>(.2.)</sub>	(1.2) <sub>(.3.)</sub>	(3.1) <sub>(.2.)</sub>	(2.1) <sub>(.3.)</sub>	(1.2) <sub>(.1.)</sub>
(3.1) <sub>(.1.)</sub>	(2.1) <sub>(.2.)</sub>	(1.3) <sub>(.3.)</sub>	(3.1) <sub>(.2.)</sub>	(2.1) <sub>(.3.)</sub>	(1.3) <sub>(.1.)</sub>
(3.1) <sub>(.1.)</sub>	(2.2) <sub>(.2.)</sub>	(1.2) <sub>(.3.)</sub>	(3.1) <sub>(.2.)</sub>	(2.2) <sub>(.3.)</sub>	(1.2) <sub>(.1.)</sub>
(3.1) <sub>(.1.)</sub>	(2.2) <sub>(.2.)</sub>	(1.3) <sub>(.3.)</sub>	(3.1) <sub>(.2.)</sub>	(2.2) <sub>(.3.)</sub>	(1.3) <sub>(.1.)</sub>
(3.1) <sub>(.1.)</sub>	(2.3) <sub>(.2.)</sub>	(1.3) <sub>(.3.)</sub>	(3.1) <sub>(.2.)</sub>	(2.3) <sub>(.3.)</sub>	(1.3) <sub>(.1.)</sub>
(3.2) <sub>(.1.)</sub>	(2.2) <sub>(.2.)</sub>	(1.2) <sub>(.3.)</sub>	(3.2) <sub>(.2.)</sub>	(2.2) <sub>(.3.)</sub>	(1.2) <sub>(.1.)</sub>
(3.2) <sub>(.1.)</sub>	(2.2) <sub>(.2.)</sub>	(1.3) <sub>(.3.)</sub>	(3.2) <sub>(.2.)</sub>	(2.2) <sub>(.3.)</sub>	(1.3) <sub>(.1.)</sub>
(3.2) <sub>(.1.)</sub>	(2.3) <sub>(.2.)</sub>	(1.3) <sub>(.3.)</sub>	(3.2) <sub>(.2.)</sub>	(2.3) <sub>(.3.)</sub>	(1.3) <sub>(.2.)</sub>
(3.3) <sub>(.1.)</sub>	(2.3) <sub>(.2.)</sub>	(1.3) <sub>(.3.)</sub>	(3.3) <sub>(.2.)</sub>	(2.3) <sub>(.3.)</sub>	(1.3) <sub>(.1.)</sub>

(3.1) <sub>(.2.)</sub>	(2.1) <sub>(.1.)</sub>	(1.1) <sub>(.3.)</sub>	(3.1) <sub>(.3.)</sub>	(2.1) <sub>(.2.)</sub>	(1.1) <sub>(.1.)</sub>
(3.1) <sub>(.2.)</sub>	(2.1) <sub>(.1.)</sub>	(1.2) <sub>(.3.)</sub>	(3.1) <sub>(.3.)</sub>	(2.1) <sub>(.2.)</sub>	(1.2) <sub>(.1.)</sub>
(3.1) <sub>(.2.)</sub>	(2.1) <sub>(.1.)</sub>	(1.3) <sub>(.3.)</sub>	(3.1) <sub>(.3.)</sub>	(2.1) <sub>(.2.)</sub>	(1.3) <sub>(.1.)</sub>
(3.1) <sub>(.2.)</sub>	(2.2) <sub>(.1.)</sub>	(1.2) <sub>(.3.)</sub>	(3.1) <sub>(.3.)</sub>	(2.2) <sub>(.2.)</sub>	(1.2) <sub>(.1.)</sub>
(3.1) <sub>(.2.)</sub>	(2.2) <sub>(.1.)</sub>	(1.3) <sub>(.3.)</sub>	(3.1) <sub>(.3.)</sub>	(2.2) <sub>(.2.)</sub>	(1.3) <sub>(.1.)</sub>
(3.1) <sub>(.2.)</sub>	(2.3) <sub>(.1.)</sub>	(1.3) <sub>(.3.)</sub>	(3.1) <sub>(.3.)</sub>	(2.3) <sub>(.2.)</sub>	(1.3) <sub>(.1.)</sub>
(3.2) <sub>(.2.)</sub>	(2.2) <sub>(.1.)</sub>	(1.2) <sub>(.3.)</sub>	(3.2) <sub>(.3.)</sub>	(2.2) <sub>(.2.)</sub>	(1.2) <sub>(.1.)</sub>
(3.2) <sub>(.2.)</sub>	(2.2) <sub>(.1.)</sub>	(1.3) <sub>(.3.)</sub>	(3.2) <sub>(.3.)</sub>	(2.2) <sub>(.2.)</sub>	(1.3) <sub>(.1.)</sub>
(3.2) <sub>(.2.)</sub>	(2.3) <sub>(.1.)</sub>	(1.3) <sub>(.3.)</sub>	(3.2) <sub>(.3.)</sub>	(2.3) <sub>(.2.)</sub>	(1.3) <sub>(.1.)</sub>
(3.3) <sub>(.2.)</sub>	(2.3) <sub>(.1.)</sub>	(1.3) <sub>(.3.)</sub>	(3.3) <sub>(.3.)</sub>	(2.3) <sub>(.2.)</sub>	(1.3) <sub>(.1.)</sub>

(3.1) <sub>(.3.)</sub>	(2.1) <sub>(.1.)</sub>	(1.1) <sub>(.2.)</sub>
(3.1) <sub>(.3.)</sub>	(2.1) <sub>(.1.)</sub>	(1.2) <sub>(.2.)</sub>
(3.1) <sub>(.3.)</sub>	(2.1) <sub>(.1.)</sub>	(1.3) <sub>(.2.)</sub>
(3.1) <sub>(.3.)</sub>	(2.2) <sub>(.1.)</sub>	(1.2) <sub>(.2.)</sub>
(3.1) <sub>(.3.)</sub>	(2.2) <sub>(.1.)</sub>	(1.3) <sub>(.2.)</sub>
(3.1) <sub>(.3.)</sub>	(2.3) <sub>(.1.)</sub>	(1.3) <sub>(.2.)</sub>
(3.2) <sub>(.3.)</sub>	(2.2) <sub>(.1.)</sub>	(1.2) <sub>(.2.)</sub>
(3.2) <sub>(.3.)</sub>	(2.2) <sub>(.1.)</sub>	(1.3) <sub>(.2.)</sub>
(3.2) <sub>(.3.)</sub>	(2.3) <sub>(.1.)</sub>	(1.3) <sub>(.2.)</sub>
(3.3) <sub>(.3.)</sub>	(2.3) <sub>(.1.)</sub>	(1.3) <sub>(.2.)</sub>

3. Alle diese Fälle sind natürlich zu untersuchen. Wir wollen uns an dieser Stelle nur fragen, was es bedeutet, wenn z.B. ein Mittel eine Interpretanten- anstatt die Objektspur trägt. Wir haben dann z.B. bei der Zeichenklasse des vollständigen Objekts folgende zwei möglichen Fälle

(3.2)<sub>(.1.)</sub> (2.2)<sub>(.2.)</sub> (1.2)<sub>(.3.)</sub>

(3.2)<sub>(.2.)</sub> (2.2)<sub>(.1.)</sub> (1.2)<sub>(.3.)</sub>.

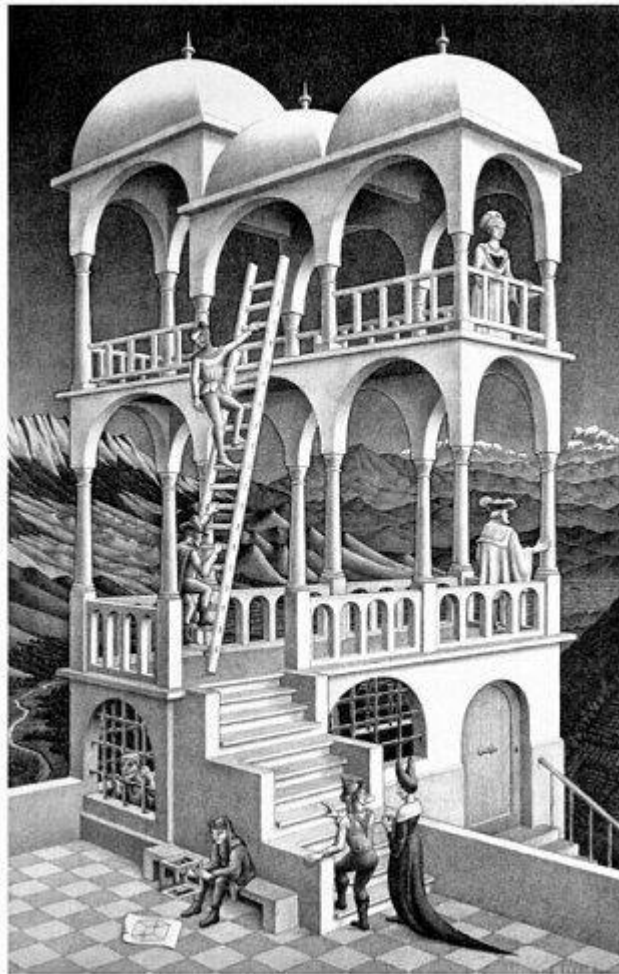
Im ersten Fall referiert also der Objektbezug nur auf sich selbst, d.h. der Interpretant ist nicht sein Nachfolger, sondern der Vorgänger des Mittels. Im zweiten Fall ist der Interpretant der Vorgänger des Objekts. In beiden Fällen ist also das semiotische Mittel der Vorgänger des Interpretanten, d.h. es gilt

(.1.) → (.3.)

und damit mengentheoretisch

(.1.) ⊂ (.3.).

Wir können also zur Illustration dieser beiden Fällen die berühmte Lithographie „Belvédère“ M.C. Eschers heranziehen, in der sich das „unmögliche Objekt“ zwar auf der 2-Dimensionalität der Fläche, nicht aber in der 3-Dimensionalität des Raumes darstellen lässt. Das Gebäude als Objekt ist zusammengesetzt aus Mitteln, d.h. Zeichenträgern, die also ein Teil des Interpretanten sind, in dessen Phantasie es besteht (denn es gibt keine 2-dimensionalen Häuser):



Damit kann man also semiotisch durch kategoriale Spuren bzw. falsche Nachfolge- und damit falsche mengentheoretische Inklusionsrelationen die physikalische Unmöglichkeit des Escherschen Gebäudes thematisieren. Es ist zu untersuchen, ob allgemein physikalische Gesetze (bzw. deren Durchbrechung) auf semiotische kategoriale Spuren bzw. Abbildungen (bzw. dem Austausch ihrer Codomänen/ Domänen) zurückgeführt werden können.

## Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Escher, Maurits Cornelis, Der Zauberspiegel des M.C. Escher, hrsg. von Bruno Ernst. Berlin 1989

## 7. Nullzeichen und kategoriale Spur

1. Bilden wir zur Peirceschen Zeichenrelation, eingeführt als Menge

$$ZR = (M, O, I),$$

die Potenzmenge, so bekommen wir

$$\mathbb{P}ZR = \{\{M\}, \{O\}, \{I\}, \{M, O\}, \{M, I\}, \{O, I\}, \{M, O, I\}, \emptyset\}.$$

Hier gilt also, solange wir uns auf ungeordnete Mengen beschränken,

$$\{M, O\} = \{O, M\},$$

$$\{O, I\} = \{I, O\},$$

$$\{M, I\} = \{I, M\}.$$

$$\{M, O, I\} = \{M, I, O\} = \{I, M, O\} = \{I, O, M\} = \{O, M, I\} = \{O, I, M\}.$$

Ferner gilt in mono- oder bilateralen Abbildungen z.B.

$$\emptyset_M \leftrightarrow \{M_M, O_M\}, \emptyset_M \leftrightarrow \{M_M, O_O\}, \emptyset_M \leftrightarrow \{M_M, O_I\} =$$

$$\{M_M, O_M\} \leftrightarrow \emptyset_M, \{M_M, O_O\} \leftrightarrow \emptyset_M, \{M_M, O_I\} \leftrightarrow \emptyset_M$$

2. Nun sind wir aber in früheren Arbeiten zur semiotischen Objekttheorie (vgl. z.B. Toth 2009a) auch Gebilden begegnet wie Objektzeichen

$$OZ = \{\langle M, M \rangle, \langle O, O \rangle, \langle I, I \rangle\}$$



und Zeichenobjekten

$$ZO = \{ \langle M, \mathcal{M} \rangle, \langle O, \Omega \rangle, \langle I, \mathcal{I} \rangle \},$$

bei denen also statt Subzeichen geordnete Paare von Subzeichen die triadischen Relationen bilden. Die Frage, die sich somit stellt, ist also: Während man geordnete Paare wie

$$\langle M_M, O_I \rangle^\circ = \langle O_I, M_M \rangle$$

einfach konvertieren kann, wie konvertiert man solche Paare, bei denen das 1. oder das 2. Glied ein Nullzeichen ist, also z.B.

$$\langle M_M, \emptyset_I \rangle^\circ, \langle \emptyset_M, O_I \rangle^\circ.$$

Wenn man sich daran erinnert, dass ein Ausdruck wie

$$O_I$$

ja nichts anderes bedeutet also

$$O \rightarrow I,$$

mit dem nicht unwesentlichen Unterschied freilich, dass im ersten Ausdruck die Abbildung nur als Spur vorhanden ist, dann ist ja die Konverse

$$(O \rightarrow I)^\circ = (I \rightarrow O) \equiv I_O,$$

d.h. sind zu supponierenden Konversen wie

$$\langle M_M, \emptyset_I \rangle^\circ = \langle \emptyset_I, M_M \rangle$$

$$\langle \emptyset_M, O_I \rangle^\circ = \langle O_I, \emptyset_M \rangle$$

natürlich völliger Blödsinn, d.h. die richtigen Lösungen lauten:

$$\langle M_M, \emptyset_I \rangle^\circ = \langle I_\emptyset, M_M \rangle$$

$$\langle \emptyset_M, O_I \rangle^\circ = \langle I_O, M_\emptyset \rangle,$$

woraus man nun ersieht, dass

$$\emptyset_M^\circ = M_\emptyset$$

$$\emptyset_O^\circ = O_\emptyset$$

$$\emptyset_I^\circ = I_\emptyset$$

Damit wird natürlich garantiert, dass die in Toth (2009b) eingeführte, um das Nullzeichen erweiterte Zeichenrelation

$$ZR^* = \{\emptyset, M, O, I\}$$

bzw. die auf ihr konstruierten Zeichenklassen auch wirklich definierte Konversen, d.h. Realitätsthematiken besitzen, so, wie sie die triadischen, Nullzeichen-losen Peirceschen Zeichenklassen haben. Damit ergibt sich folgende **Spurenmatrix** für  $ZR^*$ :

$$\begin{pmatrix} \emptyset_M & M_O & M_I & M_M \\ \emptyset_O & O_O & O_I & O_M \\ \emptyset_I & I_O & I_I & I_M \end{pmatrix}$$

Es gibt also keine nicht-indizierten Spuren ( $*\emptyset_\emptyset$ ), die Annahme einer "genuinen" Spur widerspricht natürlich der ganzen Idee der Einführung von Spuren! Das Resultat ist daher eine nicht-quadratische, asymmetrische  $4 \times 3$ -Matrix, d.h. wir können  $ZR^*$  nun präziser wiedergeben durch

$$ZR^* = \{\emptyset_a, M_b, O_c, I_d\} \text{ mit } a, \dots, d \in \{M, O, I\},$$

d.h. es handelt sich um eine tetradische, aber trichotomische Matrix genauso wie die in Toth (2008) eingeführte präsemiotische Matrix, und man ist also versucht, die Götzsche präsemiotische Trichotomie mit den Nullzeichen-Spuren zusammenzubringen (vgl. Götz 1982, S. 4, 28):

$$(0.1) = \text{Sekanz} = \emptyset_M$$

$$(0.2) = \text{Semanz} = \emptyset_O$$

$$(0.3) = \text{Selektanz} = \emptyset_I$$

Wir müssen hierauf aber in einer gesonderten Arbeit zurückkommen.

Zeichenklassen kann man daher in einer doppelten kategorialen Notation schreiben, z.B. indem man die triadischen Nachfolger als Subscripta und die trichotomischen Nachfolger als Superscripta anbringt. Dann würde z.B. (3.1 2.1 1.3) wie folgt aussehen:

$$(3.1\ 2.1\ 1.3) = (I_0^M\ O_M^M\ M_I^I),$$

und es gilt

$$\times(3.1\ 1.2\ 1.3) = (I_M^M\ M_M^O\ M_I^I).$$

Da dieses Notationssystem bei Zeichenklassen und Realitätsthematiken jedoch redundant ist, da die Triaden doppelt erscheinen, können wir wie folgt vereinfachen

$$(3.1\ 2.1\ 1.3) = (I_0^M\ O_M^M\ M_I^I) = (I^M\ O^M\ M^I)$$

$$\times(3.1\ 1.2\ 1.3) = (I^M\ M^O\ M^I),$$

d.h. die doppelte Indizierung ist völlig unnötig.

## **Bibliographie**

Götz, Matthias, Schein Design. Diss. Stuttgart 1982

Toth, Alfred, Semiotics and Pre-Semiotics. 2 Bde. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Semiotische Objekte. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009a

Toth, Alfred, Das Nullzeichen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009b

## 8. Kleine Arithmetik der Zeichen- und Objektspuren

1. Wir behandeln im folgenden Zeichen- und Objektspuren zusammen bzw. die Ergebnisse, die wir für Zeichenspuren erhalten, sind ebenfalls für Objektspuren gültig (vgl. jedoch Toth 2009a). Dabei gehen wir von der in Toth (2009b) eingeführten semiotischen Spurenmatrix aus

$$\begin{pmatrix} \emptyset_M & M_O & M_I & M_M \\ \emptyset_O & O_O & O_I & O_M \\ \emptyset_I & I_O & I_I & I_M \end{pmatrix}$$

Man sollte sich, bevor man die folgenden Theoreme studiert, welche ohne Beweise gegeben werden, weil sie selbstverständlich sind, nochmals vergegenwärtigen, dass ein Term wie  $M_O$  mathematisch dasselbe bedeutet wie

$$M \rightarrow O$$

und dass demzufolge die Konverse

$$M_O^\circ = M \leftarrow O$$

gilt. Werden also zwei Subzeichen  $M_n$  und  $N_m$  addiert, so ist das Resultat

$$M_n \cup N_m = \cup(M, N)_{n \cup m}, \text{ falls } N > M \text{ und } m > n,$$

$$\text{sonst} = N_m.$$

Das bedeutet also, dass bei der Spurenarithmetik zwischen Links- und Rechtsaddition unterschieden werden muss. Ferner müssen natürlich die Nullabbildungen speziell beachtet werden. Sind  $N = M = \emptyset$ , aber  $n \neq m$ , so gilt genau das oben zur Spurenarithmetik Gesagte. Sind jedoch  $n = m = \emptyset$ , so bleibt die Summe natürlich 0 (d.h.  $\cup(\emptyset, \emptyset) = \emptyset$ ), aber es gilt in diesem Fall  $M \cup N = \max(M, N)$ , wie bei normalen Verbänden (vgl. etwa Hermes 1967).

## 2.1. Addition von Nullzeichen

$$\emptyset_M + \emptyset_M = \emptyset_M \quad \emptyset_M + \emptyset_0 = \emptyset_0$$

$$\emptyset_0 + \emptyset_0 = \emptyset_0 \quad \emptyset_M + \emptyset_I = \emptyset_I$$

$$\emptyset_I + \emptyset_I = \emptyset_I \quad \emptyset_0 + \emptyset_I = \emptyset_I$$

$$\emptyset_0 + \emptyset_M = \emptyset_M$$

$$\emptyset_I + \emptyset_M = \emptyset_M$$

$$\emptyset_I + \emptyset_0 = \emptyset_0$$

## 2.2. Addition von Nullzeichen und Spuren

### 2.2.1. Linksaddition von Nullzeichen

$$\emptyset_M + M_M = M_M \quad \emptyset_0 + M_M = M_0$$

$$\emptyset_M + M_0 = M_0 \quad \emptyset_0 + M_0 = M_0$$

$$\emptyset_M + M_I = M_I \quad \emptyset_0 + M_I = M_0$$

$$\emptyset_I + M_M = M_I$$

$$\emptyset_I + M_0 = M_I$$

$$\emptyset_I + M_I = M_I$$

### 2.2.2. Rechtsaddition von Nullzeichen

$$M_M + \emptyset_M = \emptyset_M \quad M_M + \emptyset_0 = \emptyset_0$$

$$M_0 + \emptyset_M = \emptyset_M \quad M_0 + \emptyset_0 = \emptyset_0$$

$$M_I + \emptyset_M = \emptyset_M \quad M_I + \emptyset_0 = \emptyset_0$$

$$M_M + \emptyset_I = \emptyset_I$$

$$M_O + \emptyset_I = \emptyset_I$$

$$M_I + \emptyset_I = \emptyset_I$$

### 2.3.3. Addition von Spuren

$$M_M + M_M = M_M$$

$$M_O + O_M = O_O$$

$$M_M + M_O = M_O$$

$$M_O + O_O = O_O$$

$$M_M + M_I = M_I$$

$$M_O + O_I = O_I$$

$$M_I + I_M = I_I$$

$$M_I + I_O = I_I$$

$$M_I + I_I = I_I$$

## 2.4. Additionen mit konversen Nullzeichen

### 2.4.1. Additionen von konversen Nullzeichen

$$M_\emptyset + M_\emptyset = M_\emptyset$$

$$O_\emptyset + M_\emptyset = O_\emptyset$$

$$M_\emptyset + O_\emptyset = O_\emptyset$$

$$O_\emptyset + O_\emptyset = O_\emptyset$$

$$M_\emptyset + I_\emptyset = I_\emptyset$$

$$O_\emptyset + I_\emptyset = I$$

$$I_\emptyset + M_\emptyset = I_\emptyset$$

$$I_\emptyset + O_\emptyset = I_\emptyset$$

$$I_\emptyset + I_\emptyset = I_\emptyset$$

## 2.4.2. Additionen von konversen Nullzeichen und Spuren

$$M_{\emptyset} + O_{\emptyset} = O_{\emptyset} \qquad O_{\emptyset} + M_{\emptyset} = O_{\emptyset}$$

$$M_{\emptyset} + I_{\emptyset} = I_{\emptyset} \qquad I_{\emptyset} + M_{\emptyset} = I_{\emptyset}$$

$$O_{\emptyset} + I_{\emptyset} = I_{\emptyset} \qquad I_{\emptyset} + O_{\emptyset} = I_{\emptyset},$$

usw.

## Bibliographie

Hermes, Hans, Einführung in die Verbandstheorie. Berlin 1967

Toth, Alfred, Zur Arithmetik semiotischer Objektrelationen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009a

Toth, Alfred, Nullzeichen und kategoriale Spur. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009b

## 9. Kategoriale Spuren und Objektsabbildungen

1. Stark vereinfacht, könnte man sagen, die Theorie der kategorialen Spuren, oder kurz: semiotische Spuretheorie genannt, kehre in einem gewissen Sinne die semiotische Kategoriethorie um. Während es bei letzterer darum geht, auf Objekte zu verzichten und stattdessen Pfeile zu verwenden, handelt es sich bei ersterer darum, auf Pfeile zu verzichten und stattdessen Objekte zu verwenden – genauer allerdings: Objekte, welche Abbildungsspuren in sich tragen. Daher war es in Toth (2009b) möglich, die bekannte kleine semiotische Matrix als sogenannte semiotische Spurenmatrix zu notieren:

$$\left( \begin{array}{cccc} \emptyset_M & M_O & M_I & M_M \\ \emptyset_O & O_O & O_I & O_M \\ \emptyset_I & I_O & I_I & I_M \end{array} \right)$$

Z.B. zeigt also das Spuren-Subzeichen  $M_O$  an, dass die Abbildung von  $M \rightarrow O$  („von  $M$  nach  $O$ “) dem  $M$  **inhäriert**. Nur unter Annahme dieser Inhärenz ist es sodann möglich, die theoretisch ebenfalls existierenden weiteren Spuren-Subzeichen  $M_M$  und  $M_I$  als Aberrationen zu betrachten. Und hier wird wohl bisher am klarsten der tiefgreifende Unterschied zwischen den simplen morphismischen Abbildungen  $M \rightarrow M$ ,  $M \rightarrow O$ ,  $M \rightarrow I$  und den Spuren  $M_M$ ,  $M_O$  und  $M_I$  deutlich: Es gibt keinerlei Kriterien, wieso eine der drei Abbildungen vor einer anderen bevorzugt wäre bzw. eine richtig und zwei falsch seien. Dagegen gibt es wegen des Inhärenzgesetzes der Spuretheorie klare Gründe dafür, dass zwei der drei obigen Spuren aberrant sind. Es ist ebenfalls wichtig, darauf hinzuweisen, dass die Spuretheorie auch nicht die Theorie der generativen Semiosen Benses ersetzen kann, denn obwohl z.B.  $(1.1) > (1.2)$  gilt, gilt auch  $(1.1) > (1.3)$ , wenn auch „mit Zwischenstufe“. Letzteres ist aber spuretheoretisch ausgeschlossen.

2. Nach dem Gesagten würde man erwarten, dass die Benutzung der in Toth (2009a) eingeführten Objektsabbildungen die enorme Komplexität der Spuretheorie bereits im Bereich der Abbildungen von Primzeichen in Subzeichendyaden massiv reduzierte. Das Gegenteil ist jedoch der Fall. Um dies zu verstehen, muss man sich nochmals vergegenwärtigen, dass eine Spur wie z.B.

$M_I$

ja ein Objekt zusammen mit der Abbildungsspur

$M \rightarrow I$

darstellt. Geht man nun von Zeichenklassen aus, haben wir jeweils drei solcher Spuren bzw. Objekte mit Abbildungsspuren, wobei die letzteren sich ausschliesslich auf die trichotomischen Stellenwerte beziehen (vgl. Toth 2009c). Wird also ein Morphismus konvertiert, d.h. der „Pfeil umgekehrt“, so ändert sich für die Spur die Relation des Trägers der Spur sowie der Spur, d.h.

$M_I \rightarrow I_M$ ,

oder einfach ausgedrückt: Triade wird mit Trichotomie ausgetauscht, und vice versa.



3. Wenn wir als Beispiel den folgenden Ausschnitt von Objektabbildungen aus Toth 2009a) nehmen

$$[3 \rightarrow 1 \ 2 \rightarrow 1 \ 1 \rightarrow 3] \quad \times [3 \rightarrow 1 \ 2 \rightarrow 1 \ 1 \rightarrow 3] = [3 \leftarrow 1 \ 1 \leftarrow 2 \ 1 \leftarrow 3]$$

$$[3 \rightarrow 1 \ 2 \rightarrow 1 \ 1 \leftarrow 3] \quad \times [3 \rightarrow 1 \ 2 \rightarrow 1 \ 1 \leftarrow 3] = [3 \leftarrow 1 \ 1 \leftarrow 2 \ 1 \rightarrow 3]$$

$$[3 \rightarrow 1 \ 2 \leftarrow 1 \ 1 \rightarrow 3] \quad \times [3 \rightarrow 1 \ 2 \leftarrow 1 \ 1 \rightarrow 3] = [3 \leftarrow 1 \ 1 \rightarrow 2 \ 1 \leftarrow 3]$$

$$[3 \leftarrow 1 \ 2 \rightarrow 1 \ 1 \rightarrow 3] \quad \times [3 \leftarrow 1 \ 2 \rightarrow 1 \ 1 \rightarrow 3] = [3 \rightarrow 1 \ 1 \leftarrow 2 \ 1 \leftarrow 3]$$

$$[3 \rightarrow 1 \ 2 \leftarrow 1 \ 1 \leftarrow 3] \quad \times [3 \rightarrow 1 \ 2 \leftarrow 1 \ 1 \leftarrow 3] = [3 \leftarrow 1 \ 1 \rightarrow 2 \ 1 \rightarrow 3]$$

$$[3 \leftarrow 1 \ 2 \leftarrow 1 \ 1 \rightarrow 3] \quad \times [3 \leftarrow 1 \ 2 \leftarrow 1 \ 1 \rightarrow 3] = [3 \rightarrow 1 \ 1 \rightarrow 2 \ 1 \leftarrow 3]$$

$$[3 \leftarrow 1 \ 2 \rightarrow 1 \ 1 \leftarrow 3] \quad \times [3 \leftarrow 1 \ 2 \rightarrow 1 \ 1 \leftarrow 3] = [3 \rightarrow 1 \ 1 \leftarrow 2 \ 1 \rightarrow 3]$$

$$[3 \leftarrow 1 \ 2 \leftarrow 1 \ 1 \leftarrow 3] \quad \times [3 \leftarrow 1 \ 2 \leftarrow 1 \ 1 \leftarrow 3] = [3 \rightarrow 1 \ 1 \rightarrow 2 \ 1 \rightarrow 3],$$

dann können wir diesen Ausschnitt wie folgtein eindeutiger Weise auf das entsprechende Spurensystem abbilden:

$$[3_1 \ 2_1 \ 1_3] \quad \times [3_1 \ 2_1 \ 1_3] = [1_3 \ 2_1 \ 3_1]$$

$$[3_1 \ 2_1 \ 3_1] \quad \times [3_1 \ 2_1 \ 3_1] = [1_3 \ 2_1 \ 1_3]$$

$$[3_1 \ 1_2 \ 1_3] \quad \times [3_1 \ 1_2 \ 1_3] = [1_3 \ 1_2 \ 3_1]$$

$$[1_3 \ 2_1 \ 1_3] \quad \times [1_3 \ 2_1 \ 1_3] = [3_1 \ 2_1 \ 3_1]$$

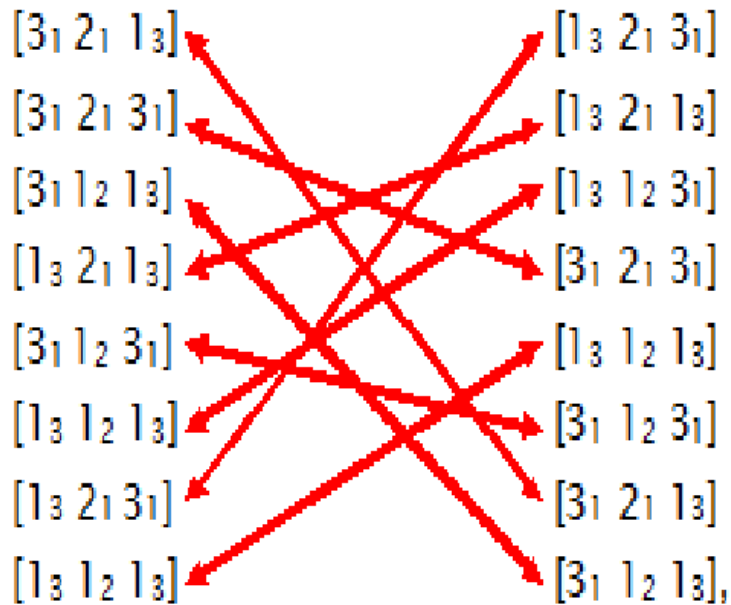
$$[3_1 \ 1_2 \ 3_1] \quad \times [3_1 \ 1_2 \ 3_1] = [1_3 \ 1_2 \ 1_3]$$

$$[1_3 \ 1_2 \ 1_3] \quad \times [[1_3 \ 1_2 \ 1_3] = [3_1 \ 1_2 \ 3_1]$$

$$[1_3 \ 2_1 \ 3_1] \quad \times [1_3 \ 2_1 \ 3_1] = [3_1 \ 2_1 \ 1_3]$$

$$[1_3 \ 1_2 \ 1_3] \quad \times [1_3 \ 1_2 \ 1_3] = [3_1 \ 1_2 \ 1_3]$$

Wie man sieht, ist also die Abbildung von Spuren auf Objektsabbildungen tatsächlich eineindeutig. Wenn wir nun noch das Verhältnis der Zeichenklassen-Spuren und der Realitätsthematik-Spuren anschauen:



dann sind die Funktionen natürlich wieder bijektiv, aber es entsteht alles andere als ein symmetrischer Verband, sondern ein im Grunde konfuse Resultat, das weder aus der Theorie der generativen Abbildungen, noch aus der semiotischen Kategoriethorie hervorgeht und das natürlich, sozusagen e negativo, die semiotische Spurentheorie als "umgekehrte" Kategorientheorie ex post rechtfertigt.

## Bibliographie

Toth, Alfred, Objektsabbildungen In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009a

Toth, Alfred, Das Nullzeichen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009b

Toth, Alfred, Nullzeichen und kategoriale Spur. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009c

## 10. Spurenklassen

1. Wie immer, benutzen wir als Ausgangsbasis der semiotischen Spuretheorie die in Toth (2009) eingeführte spurentheoretische Matrix

$$\begin{pmatrix} \emptyset_M & M_o & M_l & M_M \\ \emptyset_o & O_o & O_l & O_M \\ \emptyset_l & I_o & I_l & I_M \end{pmatrix}$$

Wie in der semiotischen Kategorientheorie, werden bei Zeichenklassen und Realitätsthematiken einerseits die triadischen Hauptwerte, andererseits die trichotomischen Stellenwerte aufeinander abgebildet. Wenn wir also von dem allgemeinen Schema einer Zeichenklasse

$$\text{Zkl} = (3.a \ 2.b \ 1.c)$$

ausgehen, so haben wir

$$\mathcal{F}(\text{Td}) = (3.) \rightarrow (2.) \rightarrow (1.)$$

$$\mathcal{F}(\text{Tt}) = (.a) \rightarrow (.b) \rightarrow (.c).$$

Zeichenklassen und Realitätsthematiken lassen sich dann natürlich definieren als

$$\text{Zkl} = \mathcal{F}(\text{Tt}) \circ \mathcal{F}(\text{Td})$$

$$\text{Rth} = (\mathcal{F}(\text{Tt}) \circ \mathcal{F}(\text{Td}))^\circ = \mathcal{F}(\text{Td}) \circ \mathcal{F}(\text{Tt}).$$

Während aber in der Kategoriethorie die beiden Abbildungstypen, d.h.  $\mathcal{F}(\text{Td})$  und  $\mathcal{F}(\text{Tt})$ , über ein und derselben morphismischen Matrix definiert sind (vgl. Toth 1997, S. 21 ff.), sind die beiden Abbildungen in der „umgekehrten“ Kategoriethorie der semiotischen Spuretheorie verschieden. Im Gegensatz zu den morphismischen Abbildungen der Triaden, d.h.  $\mathcal{F}_{\text{cat}}(\text{Td})$ , ist in der „umgekehrten“ Kategoriethorie  $\mathcal{F}_{\text{spu}}(\text{Td}) = \text{const.}$

2. Die letzteren Feststellungen sollen nun anhand der 10 Peirceschen Zeichenklassen im Detail aufgezeigt werden. Zuerst wird jede Zeichenklasse direkt in eine Spurenklasse „übersetzt“. Anschliessend werden aber die Spurenklassen getrennt für Triaden (durch  $\mathcal{F}_{\text{spu}}(\text{Td})$ ) und für Trichotomien (durch  $\mathcal{F}_{\text{spu}}(\text{Tt})$ ) bestimmt. Das Ergebnis sind nicht weniger als 3 verschiedene Spurenklassen pro Zeichenklasse.

1. (3.1 2.1 1.1)  $\rightarrow$   $(I_M O_M M_M)$

Triade: (O M I)

Trichotomie: (M M M)

2. (3.1 2.1 1.2)  $\rightarrow$   $(I_M O_M M_O)$

Triade: (O M I)

Trichotomie: (M O M)

3. (3.1 2.1 1.3)  $\rightarrow$   $(I_M O_M M_I)$

Triade: (O M I)

Trichotomie: (M I M)

4. (3.1 2.2 1.2)  $\rightarrow$   $(I_M O_O M_O)$

Triade: (O M I)

Trichotomie: (O O M)

5. (3.1 2.2 1.3)  $\rightarrow$   $(I_M O_O M_I)$

Triade: (O M I)

Trichotomie: (O I M)

6. (3.1 2.3 1.3)  $\rightarrow$   $(I_M O_I M_I)$

Triade: (O M I)

Trichotomie: (I I M)

7. (3.2 2.2 1.2)  $\rightarrow$   $(I_o O_o M_o)$

Triade: (O M I)

Trichotomie: (O O O)

8. (3.2 2.2 1.3)  $\equiv$   $(I_o O_o M_I)$

Triade: (O M I)

Trichotomie: (O I O)

9. (3.2 2.3 1.3)  $\equiv$   $(I_o O_I M_I)$

Triade: (O M I)

Trichotomie: (I I O)

10. (3.3 2.3 1.3)  $\equiv$   $(I_I O_I M_I)$

Triade: (O M I)

Trichotomie: (I I I)

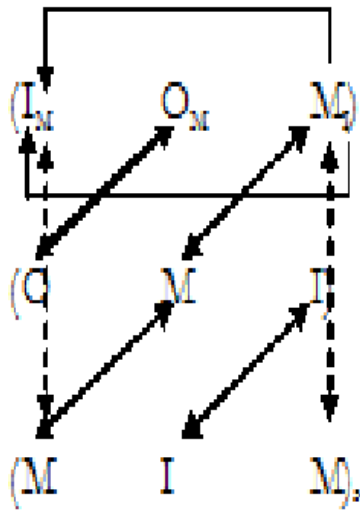
Es gilt also z.B.

$$\mathcal{F}_{\text{cat}}(\text{Td}) (3.1 2.1 1.1) = (I_M O_M M_I)$$

$$\mathcal{F}_{\text{spu}}(\text{Td}) (3.1 2.1 1.3) = (O M I)$$

$$\mathcal{F}_{\text{spu}}(\text{Tt}) (3.1 2.1 1.1) = (M I M), \text{ usw.,}$$

d.h. der relationale Zusammenhang zwischen  $\mathcal{F}_{\text{cat}}$  und  $\mathcal{F}_{\text{spu}}$  bzw. zwischen Kategorien- und Spuretheorie ist:



oder intuitiv ausgedrückt: in einer dreistelligen Relation mit den Gliedern  $x, y, z$  sind die Spuren immer  $(y, z, x)$ , d.h. bei Dyaden  $(a.b\ c.d\ e.f)$  sind die beiden Spuren  $(c\ e\ a)$  und  $(d\ f\ b)$ . Dagegen wären die kategoriethoretischen Morphismen zwischen den Triaden (Hauptwerten) als  $[a.c]$  und  $[c.e]$ , evtl., wenn zyklische Gruppe vorliegt, noch als  $[e.a]$ , und zwischen den Trichotomien (Stellenwerten) als  $[b.d]$ ,  $[d.f]$ , evtl. (zyklisch) als  $[f.b]$  definiert. Man kann also ohne weitere neben der Kategoriethorie eine nicht-triviale „Spurentheorie“ (die dann vielleicht einen besseren Namen haben sollte) konstruieren, die ausserhalb des semiotischen Kontextes eine eigene mathematische Disziplin sein kann. Die Mathematik könnte in diesem Fall nicht nur auf Zahlen- und Mengen- sowie Kategoriethorie begründet werden, sondern zusätzlich auf der „Spurentheorie“.

### Bibliographie

Toth, Alfred, Entwurf einer semiotisch-relationalen Grammatik. Tübingen 1997

Toth, Alfred, Nullzeichen und kategoriale Spur. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009

## 11. Der Zusammenhang von Kategorien und Spuren durch Identitätsfelder

1. Wie bereits in Toth (2009b) vorsichtig angetönt, gibt es einen Zusammenhang zwischen der semiotischen Kategoriethorie und der semiotischen Spuretheorie, so zwar, dass sich die Semiotik anstatt durch Kategorien (vgl. Toth 1997, S. 21 ff.) auch durch Spuren aufbauen lässt. (Evidenz für die anschließende Frage, ob auch weitere mathematische Systeme durch die komplementäre Spuretheorie begründet werden können, muss an dieser Stelle wegbleiben.) In Toth (2006/2008) war ja gezeigt worden, dass sich die Semiotik, genauso wie die Mathematik, auf den fundamentalen Begriffen der Zahl, der Menge und der Kategorien aufbauen lässt. Nur am Rande sei erwähnt, dass der in Toth (2009a) eingeführte Begriff der Spur nichts mit dem homonymen Begriff der linearen Algebra zu tun hat.

2. Nehmen wir an, der folgende Ausdruck repräsentiere einen kategoriethoretischen Zeichenzusammenhang (vgl. Toth 1997, S. 21 ff.):

$[\alpha, \beta, \beta\alpha, \beta, \alpha^\circ\beta^\circ, id_3, \alpha, id_2, \beta^\circ]$ .

Da eine Kategorie aus zwei Objekten, einer Domäne und einer Codomäne, sowie einer Abbildung zwischen ihnen besteht, kann man also in eineindeutiger Weise Objekte aus Morphismen rekonstruieren. Damit ist also der folgende Ausdruck mit vorstehendem semiotisch äquivalent:

$Kat = [[M.O], [O.I], [M.I], [O.I], [I.M], [I.I], [M.O], [O.O], [I.O]]$ .

Da Spuren separat auf Domänen bzw. Codomänen definiert sind, wobei die Menge aller Domänen in der Semiotik triadische Hauptwerte (Td) und die Menge aller Codomänen trichotomische Stellenwerte (Tt) heissen, können wir ebenfalls in eineindeutiger Weise die beiden Spuren aus dem obigen kategoriethoretischen Ausdruck rekonstruieren:

$Spu(Td) = [OMOIIMO]$

$Spu(Tt) = [IIIMIOOO]$ .

3. An dieser Stelle wollen wir uns kurz überlegen, welche strukturellen Minimalbedingungen für Kategorien einerseits und für Spuren andererseits erfüllt sein

müssen. Wie man aus dem folgenden sieht, empfiehlt es sich, vorab zwischen einfachen und komplexen (= zusammengesetzten) Kategorien zu unterscheiden.

### 3.1. Minimum einfache Kategorie

$$A \rightarrow B$$

$$m(A \rightarrow B) = [a.b]$$

### 3.2. Minimum einfache Spur

$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

$$s(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow [[b.c], [c.a]]$$

Eine einfache Spur setzt damit mindestens 3 Objekte und 2 Abbildungen voraus.

### 3.3. Minimum komplexe Kategorie

$$A.B \rightarrow C.D$$

$$m(A \rightarrow C) = [a.c]$$

$$m(B \rightarrow D) = [b.d]$$

### 3.4. Minimum komplexe Spur

$$A.B \rightarrow C.D \rightarrow E.F$$

$$s(A \rightarrow C \rightarrow E) \rightarrow [[c.e], [e.a]]$$

$$s(B \rightarrow D \rightarrow F) \rightarrow [[d.f], [f.b]]$$

Eine komplexe Spur besteht damit mindestens aus einem Paar von paarweisen Abbildungen.

4. Wenn wir nun von einer minimalen komplexen Spur ausgehen, d.h. von der Struktur

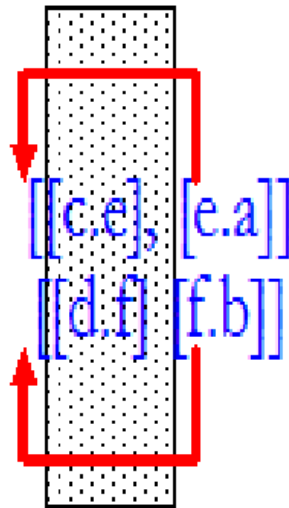
$$A.B \rightarrow C.D \rightarrow E.F$$



$s(A \rightarrow C \rightarrow E) \rightarrow [[c.e], [e.a]]$

$s(B \rightarrow D \rightarrow F) \rightarrow [[d.f] [f.b]],$

dann sehen wir einen höchst bemerkenswerten Zusammenhang zwischen Spuren und Kategorien. Wir haben imfolgenden (blau Spuren, rot Kategorien, schraffiert Identitätsfeld):



**Eine minimale komplexe Kategorie ist damit die konverse Relation aus der Codomäne des 2. Gliedes und der Domäne des 1. Gliedes eines Paares von Abbildungen, sofern die Codomäne des 1. Gliedes und die Domäne des 2. Gliedes identisch sind.**

### **Bibliographie**

Toth, Alfred, Entwurf einer semiotisch-relationalen Grammatik. Tübingen 1997

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. 2. Aufl. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Kategoriale Spuren. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009a

## 12. Gemischte Kategorien und gemischte Spuren

1. In Toth (2009) hatten wir eine Art von Minimaltheorie von semiotischen Kategorien und Spuren untersucht und haben sie „strukturell“ (d.h. weitgehend informell) wie folgt definiert:

### 1.1. Minimum einfache Kategorie

$$A \rightarrow B$$

$$m(A \rightarrow B) = [a.b]$$

### 1.2. Minimum einfache Spur

$$A \rightarrow B \rightarrow C$$

$$s(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow [[b.c], [c.a]]$$

### 1.3. Minimum komplexe Kategorie

$$A.B \rightarrow C.D$$

$$m(A \rightarrow C) = [a.c]$$

$$m(B \rightarrow D) = [b.d]$$

### 1.4. Minimum komplexe Spur

$$A.B \rightarrow C.D \rightarrow E.F$$

$$s(A \rightarrow C \rightarrow E) \rightarrow [[c.e], [e.a]]$$

$$s(B \rightarrow D \rightarrow F) \rightarrow [[d.f] [f.b]]$$

2. Alle in den obigen 2 Spuren- und 2 Kategorien-Typen involvierten Abbildungen sind homogen, d.h. strikt nach Domänen und Codomänen abgetrennt. Es ist aber theoretisch auch möglich, Abbildung von und nach gemischten Domänen und Codomänen vorzunehmen.

2.1. Minimum komplexe gemischte Kategorie :

$$A.B \rightarrow C.D$$

$$m(A \rightarrow D) = [a.d]$$

$$m(B \rightarrow C) = [b.c]$$

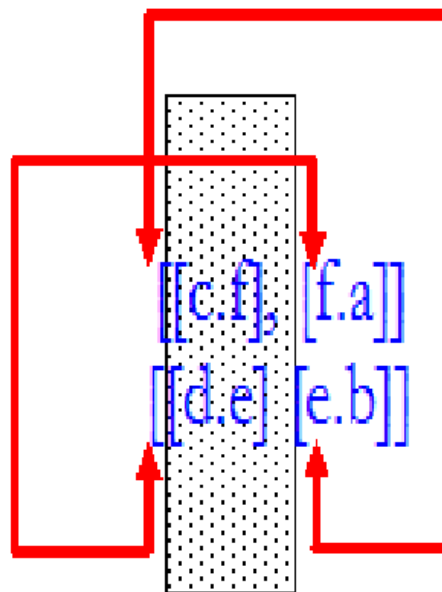
2.2. Minimum komplexe gemischte Spur =

$$A.B \rightarrow C.D \rightarrow E.F$$

$$s(A \rightarrow C \rightarrow E) \rightarrow [[c.f], [f.a]]$$

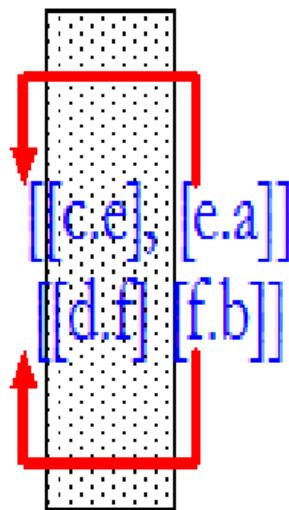
$$s(B \rightarrow D \rightarrow F) \rightarrow [[d.e] [e.b]]$$

Damit erhalten wir folgendes Schema (blau Spuren, rot Kategorien, schraffiert Identitätsfeld):



Eine minimale komplexe gemischte Kategorie ist die konverse Relation aus der Codomäne des 2. Gliedes des 1. Paares und der Domäne des 1. Gliedes des 2. Paares sowie der Codomäne des 2. Gliedes des 2. Paares und der Domäne des 1. Gliedes des 1. Paares von Abbildungen, sofern die Codomäne des 1. Gliedes und die Domäne des 2. Gliedes des 1. Paares sowie die Codomäne des 1. Gliedes und die Domäne des 2. Gliedes des 2. Paares identisch sind.

Wenn wir diesem Schema dasjenige aus Toth (2009) der homogenen Kategorien und Spuren gegenüberstellen:



dann erkennt man, dass das Verhältnis zwischen den beiden Schemata chiasmatisch ist:



Man müsste anhand von nicht-minimalen Kategorien und Spuren untersuchen, ob bei allen möglichen Kombinationen homogener und gemischter Abbildungen chiasmatische Relationen vorliegen.

### **Bibliographie**

Toth, Alfred, Der Zusammenhang von Kategorien und Spuren durch Identitätsfelder. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009

### **13. Kategorien aus Objekten und Spuren aus Kategorien**

1. In einem gewissen Sinne könnte man sagen, die Kategoriethorie eliminiere die Objektvorstellung der Mengentheorie und ersetze sie durch die Abbildungen zwischen ihnen. Man stelle sich vor: Zwei Liebende, A und B, es besteht also eine Relation zwischen ihnen. Wie wäre es, wenn man diese Relation einfach zwischen den beiden herausheben und von ihnen (weitgehend) unabhängig machen könnte? Seriöser steht es bei MacLane: „Da eine Kategorie aus Pfeilen besteht, liesse sich unser Thema auch als Behandlung des Problem es auffassen, wie man ohne Elemente auskommen und statt ihrer Pfeile benutzen kann“ (1972, S. iii).

2. Da die semiotische Kategoriethorie auf der Basis der Peirceschen Zeichenrelation

$$ZR = (M, O, I)$$

und also ohne Nullzeichen eingeführt wurde, gibt es in der entsprechenden kategorialen semiotischen Matrix weder indizierte noch nicht-indizierte Leerkategorien (vgl. Toth 1997, S. 21 ff.):

$$\left( \begin{array}{c|ccc} \hline - & \alpha & \beta\alpha & id_1 \\ \hline - & id_2 & \beta & \alpha^\circ \\ \hline - & \beta^\circ & id_3 & \alpha^\circ\beta^\circ \\ \hline \end{array} \right)$$

3. Demgegenüber basiert die semiotische Spurentheorie (vgl. Toth 2009a und zahlreiche Nachfolgearbeiten) auf der durch das Nullzeichen erweiterten Peirceschen Zeichenrelation

$$ZR^* = (\emptyset, M, O, I),$$

es gibt in der entsprechenden Spurenmatrix Abbildungen von und nach indizierten Nullzeichen:

$$\left( \begin{array}{c|ccc} \hline \emptyset_M & M_O & M_I & M_M \\ \hline \emptyset_O & O_O & O_I & O_M \\ \hline \emptyset_I & I_O & I_I & I_M \\ \hline \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc|c} \hline M_\emptyset & O_\emptyset & I_\emptyset & \\ \hline M_O & O_O & I_O & \\ M_I & O_I & I_I & \\ M_M & O_M & I_M & \\ \hline \end{array} \right)^T$$

Mit T ist wie übliche die Transponierte der  $4 \times 3$ -Matrix bezeichnet. Es gelten also die folgenden Dualisationsbeziehungen

$$x(\emptyset_M) = M_\emptyset$$

$$x(\emptyset_O) = O_\emptyset$$

$$x(\emptyset_I) = I_\emptyset$$

4. Kategorien werden aus Objekten und den Abbildungen zwischen ihnen wie folgt definiert (vgl. Toth 1997, S. 21 ff.):

$$\begin{array}{lcl} 1 \rightarrow 2 & \equiv & \alpha \\ 2 \rightarrow 1 & \equiv & \alpha^\circ \\ 2 \rightarrow 3 & \equiv & \beta \end{array} \parallel \begin{array}{lcl} 3 \rightarrow 2 & \equiv & \beta^\circ \\ 1 \rightarrow 3 & \equiv & \beta\alpha \\ 3 \rightarrow 1 & \equiv & \alpha^\circ\beta^\circ \end{array} \parallel \begin{array}{lcl} 1 \rightarrow 1 & \equiv & \text{id}_1 \\ 2 \rightarrow 2 & \equiv & \text{id}_2 \\ 3 \rightarrow 3 & \equiv & \text{id}_3 \end{array}$$

Dabei werden also nur 2 Basisabbildungen,  $\alpha$  und  $\beta$ , benötigt, die restlichen sind Kompositen, Konversen und die üblichen Identitäten.

5. Spuren können aus Kategorien auf zweierlei Weise gewonnen werden. Erstens durch die in Toth (2009a) eingeführte Spurenschreibweise  $X_Y$ , worin  $X$  die Domäne eines Morphismus und  $Y$  die Spur der Codomäne des Morphismus angibt. Auf diese Weise ist es möglich, zwischen „richtigen“ (z.B.  $M_O$ ) und „falschen“ Spuren (z.B.  $M_M, M_I$ ) zu unterscheiden. Zweitens kann man das bereits in Toth (2008) eingeführte Substanz-Eliminierungsverfahren verwenden, eine Notation, die neben den drei Pfeilen  $\rightarrow, \leftarrow, \downarrow$  nur die drei semiotischen Kategoriensymbole 1, 2, 3 verwendet. Die nachstehende Tabelle gibt beide Verfahren:

Kategorien  $\rightarrow$  Spuren:

$$\begin{array}{lcl} - & \emptyset_M \equiv & \emptyset \rightarrow \\ \text{id}_1 & \equiv M_M \equiv & 1 \downarrow \\ \alpha & \equiv M_O \equiv & \leftarrow 1 \rightarrow \\ \beta\alpha & \equiv M_I \equiv & \leftarrow 1 \end{array} \parallel \begin{array}{lcl} - & \emptyset_O \equiv & \rightarrow \emptyset \leftarrow \\ \alpha^\circ & \equiv O_M \equiv & 2 \rightarrow \\ \text{id}_2 & \equiv O_O \equiv & 2 \downarrow \\ \beta & \equiv O_I \equiv & \leftarrow 2 \end{array}$$

---


$$\begin{array}{lcl}
 - & \cong & \emptyset_1 \cong \emptyset \leftarrow \\
 \alpha^\circ \beta^\circ & \cong & I_M \cong 3 \rightarrow \\
 \beta^\circ & \cong & I_0 \cong \leftarrow 3 \rightarrow \\
 \text{id}_3 & \cong & I_1 \cong 3 \downarrow
 \end{array}$$

Durch Fettdruck werden die hier neu dazukommenden Null-Abbildungen gekennzeichnet.

6. Im ersten Fall werden also aus den semiotischen Objekten reine Abbildungen gewonnen, das ist der Bereich der semiotischen Kategoriethorie. Im zweiten Fall hingegen werden aus den semiotischen Kategorien auf zwei verschiedenen Wegen Spuren gewonnen; Spuren sind, grob gesagt, **gerichtete Objekte**. Dieser Begriff stammt ursprünglich aus der Architekturtheorie (vgl. Toth 2009b) und wurde von mir neu in die Mathematik eingeführt. Somit gilt, dass die mathematischen Begriffe Kategorie und gerichtetes Objekt in gewissem Sinne kontradiktorisch, in gewissem Sinne aber komplementär sind. Weitere Studien werden sind nötig und werden folgen.

## Bibliographie

MacLane, Saunders, Kategorien. Berlin 1972

Toth, Alfred, Entwurf einer semiotisch-relationalen Grammatik. Tübingen 1997

Toth, Alfred, Die Auslöschung der semiotischen Substanz. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2008

Toth, Alfred, Kategoriale Spuren. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009a

Toth, Alfred, Gerichtete Objekte. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009b



## 14. Der Mechanismus der kategoriellen Perkolation

1. Nach Toth (2009a) ist eine Semiotik jede Struktur, welche das Tripel

$$\Sigma = \langle \{\{\Omega\}, \{\mathcal{U}\}, \{\mathcal{R}\}\}, \{\emptyset_M, \emptyset_O, \emptyset_I\}, \{\{M_M, M_O, M_I\}, \{O_M, O_O, O_I\}, \{I_M, I_O, I_I\}\} \rangle$$

erfüllt. Dabei muss also garantiert werden, dass die Entstehung der drei Teilmengen des semiotischen Raumes aus den triadisch bzw. trichotomisch fungierenden Peirceschen Universalkategorien im Rahmen dieses Semiose-Modells seit dem ontischen Raum garantiert ist. Eine besondere Funktion kommt dabei dem intermediären präsemiotischen Raum zu, der zwischen Ontik und Semiotik vermittelt.

2. Andererseits kann der präsemiotische Raum „übersprungen“ werden, ohne dass die kategorielle Perkolation zwischen Ontik und Semiotik gestört wird, wie man anhand der sog. semiotischen Objekte sieht, welche Tripel aus geordneten Paaren sind, deren erstes bzw. zweites Element ontisch und deren zweites bzw. erstes Element semiotisch sind (vgl. Toth 2009b):

$$ZO = \langle M, \mathcal{M} \rangle, \langle O, \Omega \rangle, \langle I, \mathcal{I} \rangle$$

$$OZ = \langle \mathcal{M}, M \rangle, \langle \Omega, O \rangle, \langle \mathcal{I}, I \rangle$$

3. Schliesslich ist es sogar so, dass eine Perkolation vom präsemiotischen zum semiotischen Raum möglich ist unter Unterdrückung des ontischen Raumes, wie aus den in Toth (2009c) besprochenen „Dispositionszeichen“ und „Zeichendispositionen“ hervorgeht:

$$ZD = \langle M, M^\circ \rangle, \langle O, O^\circ \rangle, \langle I, I^\circ \rangle$$

$$DZ = \langle M^\circ, M \rangle, \langle O^\circ, O \rangle, \langle I^\circ, I \rangle$$

Da es ausgeschlossen ist, dass die Fundamentalkategorien dort entstehen, wo sie bereits gebraucht werden, haben wir hier einen weiteren Hinweis darauf, dass der ontische Raum nicht die letzte „präsemiotische“ Struktur ist, sondern dass

sich dahinter noch eine „black box“ verbirgt, die scheinbar dann zu wirken beginnt, wenn eine Zeichenart im ontischen Raum nicht realisiert erscheint. Dies wurde anhand der Codomänen und Spuren der Nullzeichen in Toth (2009d) nachgewiesen:

$\emptyset_M \equiv \emptyset \rightarrow$ : Bewegung vom Nichts weg

$\emptyset_I \equiv \emptyset \leftarrow$ : Bewegung (von vorn) zum Nichts hin

$M_{\emptyset} \equiv \leftarrow \emptyset$ : **Bewegung hinter das Nichts**

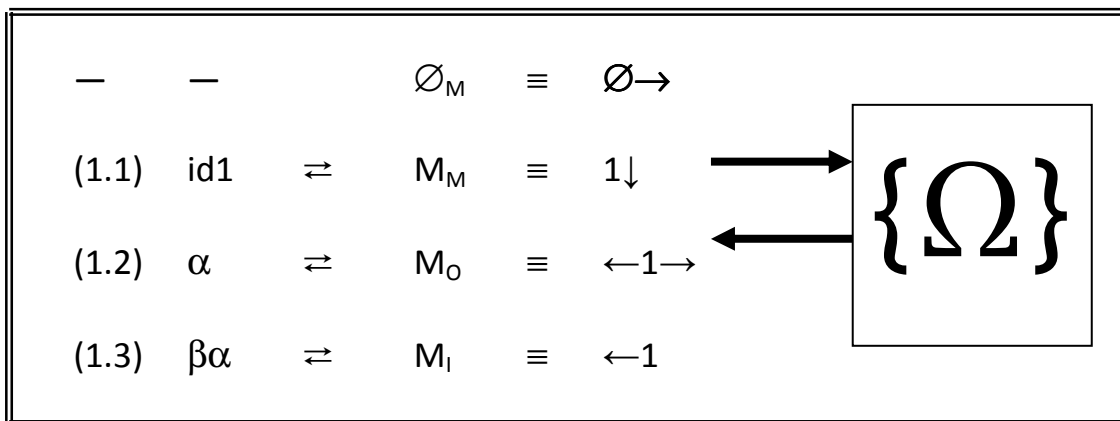
$I_{\emptyset} \equiv \rightarrow \emptyset$ : **Bewegung (von hinten) zum Nichts**

$\emptyset_O \equiv \rightarrow \emptyset \leftarrow$ : Bewegung (von vorn und von hinten) zum Nichts

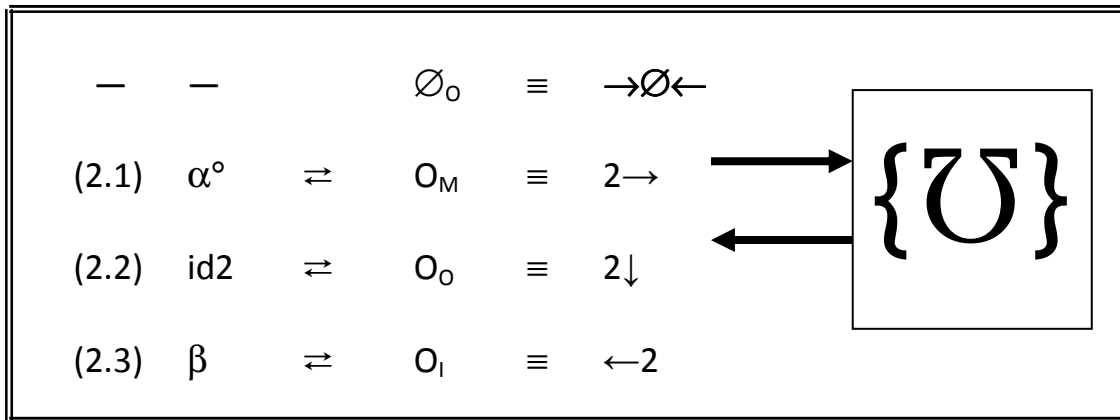
$O_{\emptyset} \equiv \leftarrow \emptyset \rightarrow$ : Bewegung (von beiden Seiten) vom Nichts weg

4. Die vollständigen Perkolationsmechanismen für die drei Fundamentalkategorien M, O und I werden durch die folgenden Strukturen der drei Teilräume des ontischen Raumes separat gegeben:

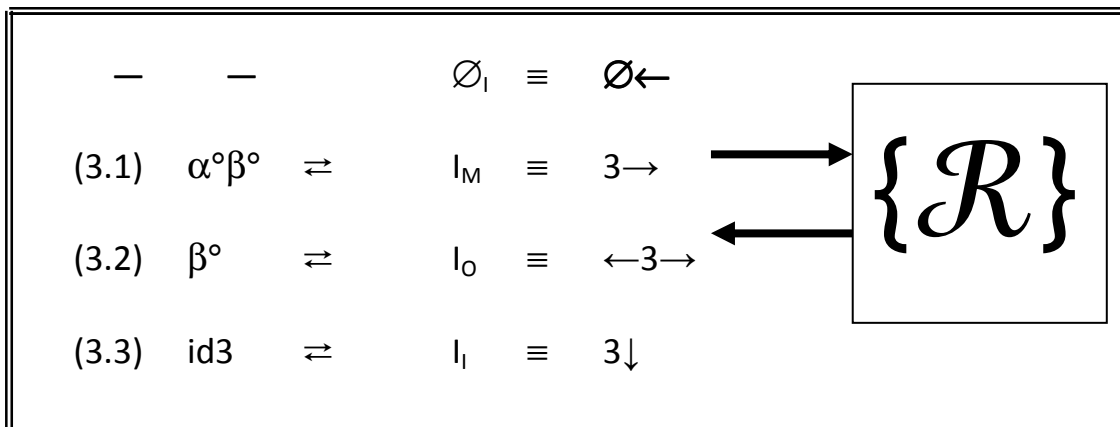
#### 4.1. M-Teilraum des ontischen Raumes



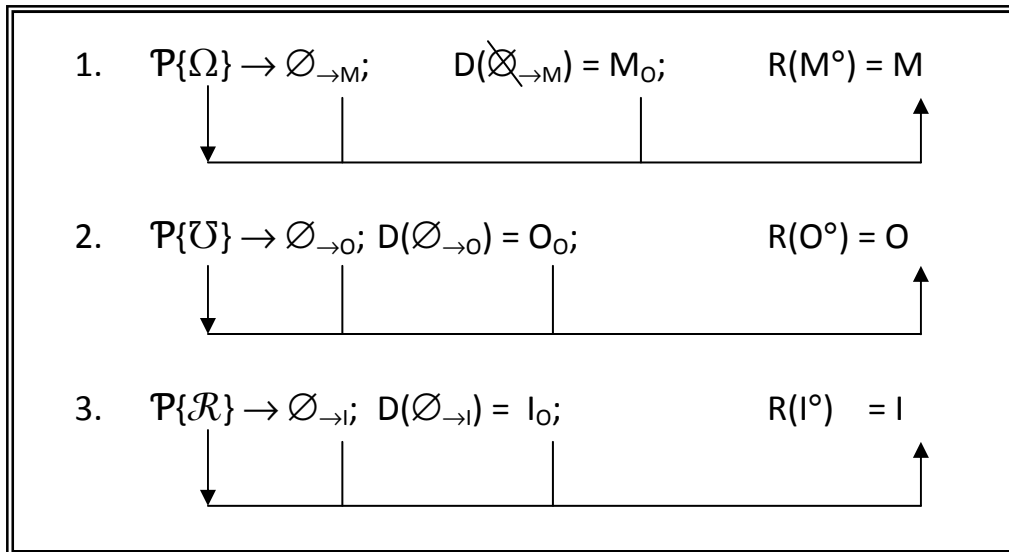
#### 4.2. O-Teilraum des ontischen Raumes



#### 4.3. I-Teilraum des ontischen Raumes



Damit ist es nun möglich, das Vererbungsschema aus Toth (2008, S. 166 ff.) in der Form des folgenden vollständigen Perkolationschemas wiederzugeben :



## Bibliographie

Toth, Alfred, Semiotische Strukturen und Prozesse. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Ein kategoriethoretisch-spurentheoretisches Semiosemodell. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009a

Toth, Alfred, Semiotische Objekte. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009b

Toth, Alfred, Disponible Zeichen und Zeichendispositionen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009c

Toth, Alfred, Kategorielle Perkolation. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009d

## 15. Semiotische n-Spuren

1. In Toth (2009a, b) wurden semiotische n-Kategorien und n-Morphismen untersucht. Die Idee, welche hinter der Einführung von n-Kategorien steht, basiert auf der auch in der Semiotik nachzuvollziehenden Überlegung, dass man etwa bei den Abbildungen von Primzeichen auf Subzeichen; von Subzeichen auf

Zeichenklassen; von Zeichenklassen auf Trichotomische Triaden usw. nicht stets die gleichen Abbildungen bzw. Morphismen verwenden kann und dass sich zusätzlich zu den Pfeilen der klassischen Kategorietheorie neben horizontalen auch vertikale Abbildung unterscheiden lassen können. Bereits 1967 hatte Jean Bénabou diese Vorstellungen anhand der Bi-Kategorien eingeführt.

2. In Toth (2009b) hatten wir folgende Übersicht der semiotischen n-Kategorien gegeben:

$PZ \rightarrow SZ$

$PZ \rightarrow SZP$

$SZ \rightarrow SZP$

$PZ \rightarrow Zkln/Rthn$

$SZ \rightarrow Zkln/Rthn$

$SZP \rightarrow Zkln/Rthn$

$PZ \rightarrow TrTr$

$SZ \rightarrow TrTr$

$SZP \rightarrow TrTr$

$Zkln/Rthn \rightarrow TrTr$

$\alpha := (.1.) \rightarrow (.2.)$

$\beta := (.2.) \rightarrow (.3.),$

seien ferner

$A, B := (\alpha/\beta) \rightarrow (\alpha/\beta)$

$\underline{A}, \underline{B} := (A, B) \rightarrow (A, B)$

$\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}} := (\underline{A}, \underline{B}) \rightarrow (\underline{A}, \underline{B})$

$\underline{\underline{\underline{A}}}, \underline{\underline{\underline{B}}} := (\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}) \rightarrow (\underline{\underline{A}}, \underline{\underline{B}}),$  usw.,

3. Wenn wir nun Spuren im Sinne von Hierarchien von n-Spuren aufeinander abbilden wollen,

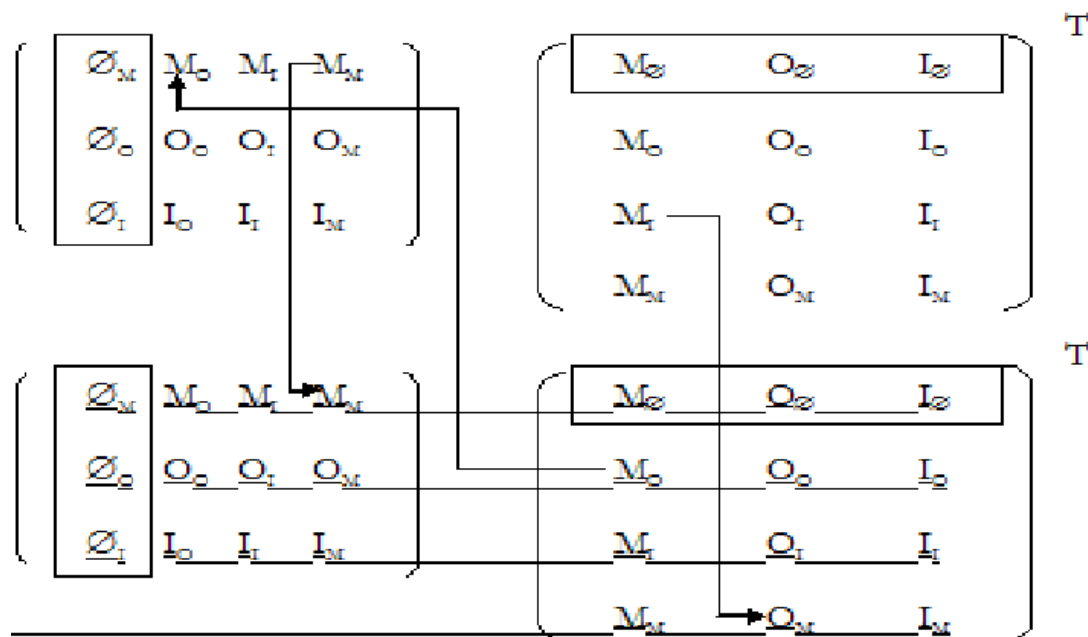
$$A, B := (A_B) = (A \rightarrow_B)$$

$$\underline{A}, B := (\underline{A}_B) \rightarrow (\underline{A} \rightarrow_B)$$

$$\underline{A}, \underline{B} := (\underline{A}_{\underline{B}}) \rightarrow (\underline{A} \rightarrow_{\underline{B}})$$

$$\underline{A}, \underline{\underline{B}} := (\underline{A}_{\underline{\underline{B}}}) \rightarrow (\underline{A} \rightarrow_{\underline{\underline{B}}}), \text{ usw.},$$

dann können wir sowohl die Domänen als auch die als Codomänen dienenden Spuren der Abbildungen den folgenden Spurenmatrizen entnehmen:



Hier sind nur einige Abbildungen der ersten zwei n-Spuren eingetragen, wo sich in den Transponierten die dualen realitätsthematischen Spuren finden, so dass man also nicht nur, wie in der obigen kleinen Tabelle, mit Zkln, sondern auch mit Rthn operieren kann.

$$\begin{array}{c}
 \left( \begin{array}{c} \boxed{\underline{O}_M} \\ \underline{O}_O \\ \underline{O}_I \end{array} \begin{array}{ccc} \underline{M}_O & \underline{M}_I & \underline{M}_M \\ \underline{O}_O & \underline{O}_I & \underline{O}_M \\ \underline{I}_O & \underline{I}_I & \underline{I}_M \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc} \boxed{\underline{M}_O} & \underline{O}_O & \underline{I}_O \\ \underline{M}_O & \underline{O}_O & \underline{I}_O \\ \underline{M}_I & \underline{O}_I & \underline{I}_I \\ \underline{M}_M & \underline{O}_M & \underline{I}_M \end{array} \right)^T \\
 \hline
 \left( \begin{array}{c} \boxed{\underline{O}_M} \\ \underline{O}_O \\ \underline{O}_I \end{array} \begin{array}{ccc} \underline{M}_O & \underline{M}_I & \underline{M}_M \\ \underline{O}_O & \underline{O}_I & \underline{O}_M \\ \underline{I}_O & \underline{I}_I & \underline{I}_M \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc} \boxed{\underline{M}_O} & \underline{O}_O & \underline{I}_O \\ \underline{M}_O & \underline{O}_O & \underline{I}_O \\ \underline{M}_I & \underline{O}_I & \underline{I}_I \\ \underline{M}_M & \underline{O}_M & \underline{I}_M \end{array} \right)^T
 \end{array}$$

Keine Probleme bieten formal also in Sonderheit Abbildungen von Spuren innerhalb derselben Matrix, bzw. zwischen einer Matrix und ihrer Transponierten, wo also die Domänen und Codomänenspuren verschiedenen Dualisationsrelationen angehören.

### Bibliographie

Bénabou, Jean, Introduction to bicategories, part I". In: Reports of the Midwest Category Seminar, Lecture Notes in Mathematics 47, S. 1-77

Toth, Alfred, Übersicht über semiotische n-Kategorien. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2009a

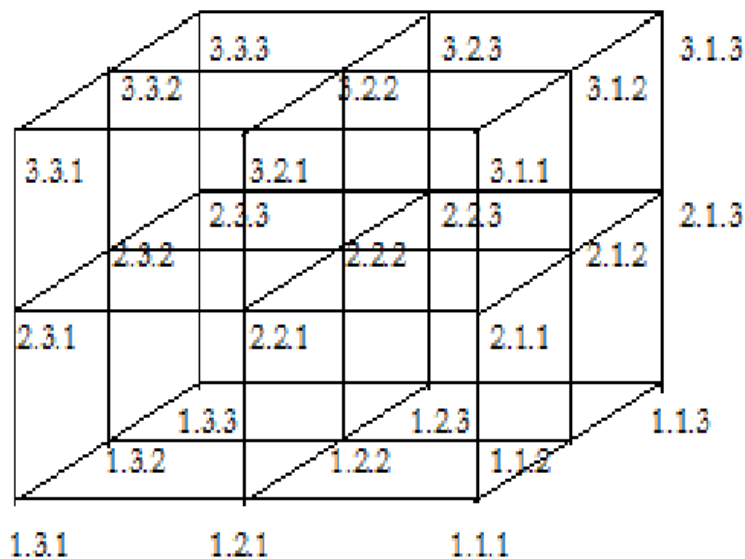
Toth, Alfred, Semiotische n-Morphismen. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2009b

## 16. Bi-Spuren und dreidimensionale Primzeichen

1. Nach Hans Michael Stiebing (1978, S. 77) kann man einen dreidimensionalen semiotischen Raum als dreifaches kartesisches Produkt der Menge der Primzeichen  $PZ = \{1, 2, 3\}$  mit sich selbst definieren;

$$3\text{-sR} = \{1, 2, 3\}^3,$$

so dass also die Punkte des Kubus je durch ein Zahlentripel  $(x, y, z)$  mit  $x, y, z \in \{1, 2, 3\}$  gekennzeichnet sind:



Die Punkte dieses 3-stelligen Simplex sind also dreistellige Primzeichen der Form

$$3\text{-PZ} = (a.b.c) \text{ mit } a, b, c \in \{1, 2, 3\},$$

deren a-Wert jeweils die Dimension angibt, denn wir gehen aus von der folgenden zweidimensionalen Zeichenebene



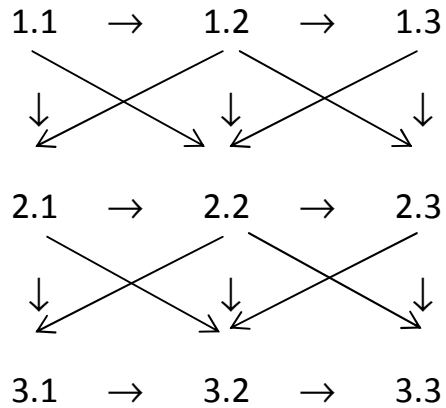
	3.3	2.3	1.3
3.2	2.2		1.2
3.1	2.1		1.1

und projizieren diese Ebene mit steigendem  $a = 1$ ,  $a = 2$  und  $a = 3$  auf drei Dimensionen. Z.B. bedeutet also (1.2.1) ein eindimensionales Icon, (2.3.2) einen zweidimensionalen Dicot und (3.1.3) ein dreidimensionales Legizeichen. (1.1.3) unterscheidet sich also von (1.3) dadurch, dass (1.1.3) sich mit Subzeichen anderer Dimensionen zu einer dreidimensionalen Zeichenrelation kombinieren lässt, was für (1.3) nicht der Fall ist. Man geht daher am besten aus von der folgenden dreidimensionalen triadischen Zeichenrelation

3-ZR = (a.3.b c.2.d e.3.f) mit  $a, \dots, f \in \{1, 2, 3\}$ ,

wobei also der pro Partialrelation erste Wert, d.h. a, c, e die Dimension, die Werte 3, 2, 1 die triadischen Hauptwerte und b, e, f die trichotomischen Stellenwerte bezeichnet.

2. Wenn wir nun zuerst die Vorgänger- und Nachfolger der zweidimensionalen Primzeichen der Form (3.a), (2.b), (1.c) mit  $a, b, c \in \{1, 2, 3\}$  in der oben abgebildeten Zeichenebene bestimmen, bekommen wir (vgl. Toth 2008, S. 154):



$$\begin{array}{lll}
 V(1.1) = 0, N(1.1) = 3 & V(2.1) = 2, N(2.1) = 3 & V(3.1) = 2, N(3.1) = 1 \\
 V(1.2) = 3, N(1.2) = 4 & V(2.2) = 4, N(2.2) = 4 & V(3.2) = 3, N(3.2) = 1 \\
 V(1.3) = 3, N(1.3) = 2 & V(2.3) = 3, N(2.3) = 2 & V(3.3) = 3, N(3.3) = 0
 \end{array}$$

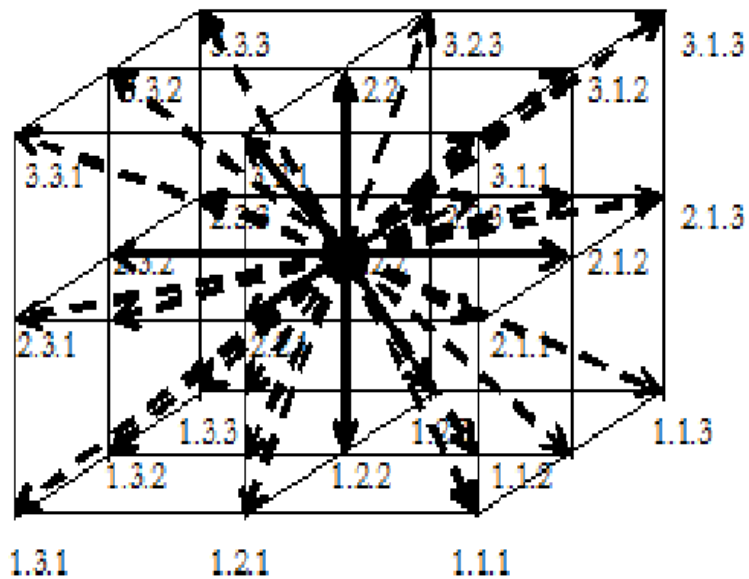
3. Ein beträchtlich komplizierteres System von Vorgängern und Nachfolgern ergibt sich bei dreidimensionalen Primzeichen. Abstrakt ausgedrückt kann ein Primzeichen die folgende maximale Menge von Nachfolgern (bzw., durch Vertauschung von + mit -, Vorgängern) haben:

$$N_{\max}(\text{PZ}) = N_{\max}(a.b.c) = \{(a+1.b.c), (a.b+1.c), (a.b.c+1), (a+2.b.c), (a.b+2.c), (a.b.c+2), (a+1.b+1.c), (a+1.b.c+1), (a.b+1.c+1), (a+1.b+2.c), (a+1.b.c+2), (a.b+2.c+2)\}$$

Die minimale Menge von Nachfolgern (bzw. Vorgängern) ist danach

$$N_{\min}(\text{PZ}) = \{(a+1.b.c) \vee (a.b+1.c) \vee (a.b.c+1)\}$$

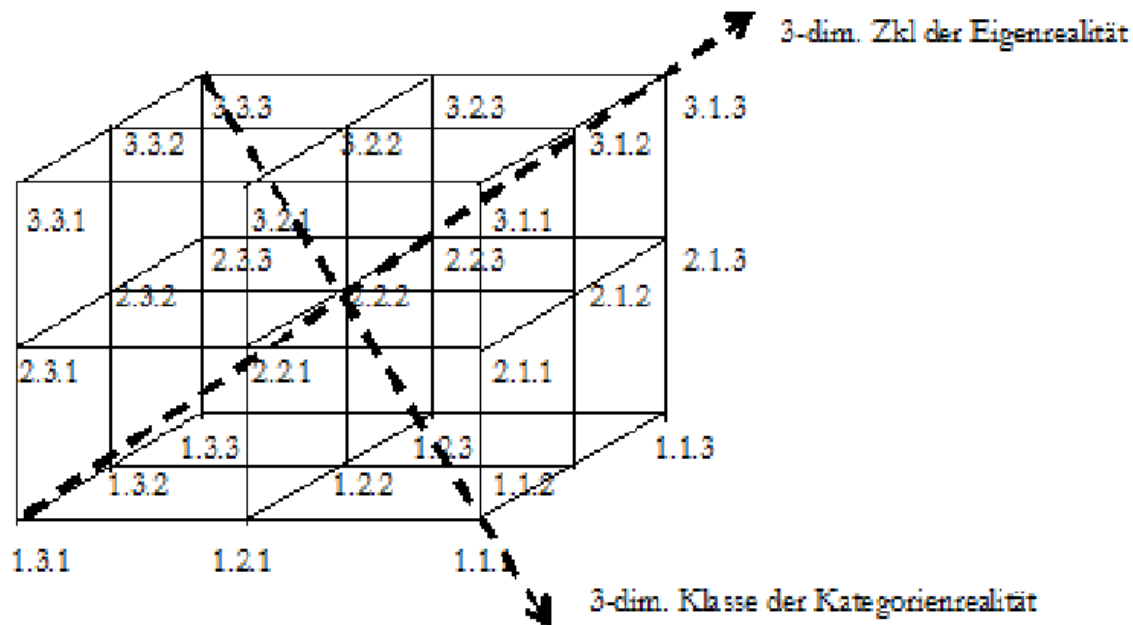
Nehmen wir als Beispiel die Anzahl der Vorgänger und Nachfolger von (2.2.2):



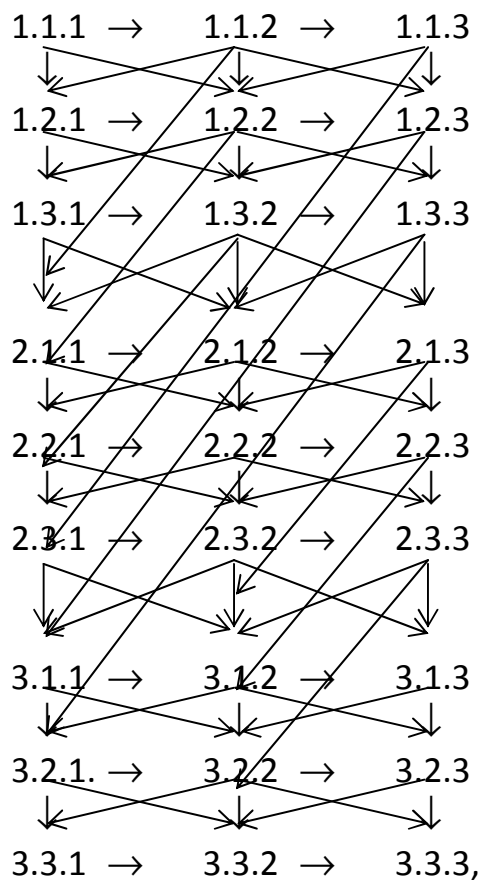
Wenn wir nur solche Nachfolger zulassen, welche durch Kanten mit (2.2.2) verbunden sind, hat (2.2.2) also die folgenden 6 Nachfolger:

$$N(2.2.2) = \{(1.2.2), (3.2.2), (2.3.2), (2.1.2), (2.2.1), (2.2.3)\},$$

deren Kanten im Bild ausgezogen sind. Wenn wir aber auch solche Nachfolger zulassen, welche nicht direkt durch Kanten mit (2.2.2) verbunden sind, dann ist (2.2.2), da er der zentrale Gitterpunkt des Kubus ist, mit allen 27 Punkten verbunden. Dieses Verfahren lässt sich dadurch legitimieren, dass der zwei-dimensionale Index (2.2) ja der Schnittpunkt der beiden Diagonalen der Zeichenebene, d.h. der eigenrealen (3.1 2.2 1.3) und der kategorienrealen (3.3. 2.2 1.1) Zeichenklasse ist. Entsprechende Verhältnisse finden sich nun auch im dreidimensionalen Zeichenraum:



Wenn man den Kubus auf zwei Dimensionen zurückprojiziert, ergibt sich folgendes interessante System von Vorgängern und Nachfolgern:



wobei die hier zu Spalten linearisierten Folgen dreidimensionaler Primzeichen also sowohl die horizontalen wie die vertikalen Nachfolger (bzw. Vorgänger) des Zeichenkubus enthalten. Dreidimensionale Primzeichen haben also drei Haupttypen von Nachfolgern: 1. dimensionale Nachfolger, 2. triadische Nachfolger, 3. trichotomische Nachfolger.

4. Nun sind, wie Bense (1975, S. 167; 1983, S. 192 ff.) gezeigt hatte, die drei ersten Peano-Zahlen isomorph zur Peirceschen Zeichenrelation, denn es gilt

$$PZ = (.1.) \rightarrow (.2.) \rightarrow (.3.)$$

bzw.

$$PZ = ((.1.) \rightarrow ((.2.) \rightarrow (.3.))),$$

oder

$$(I) \subset (II) \subset (III),$$

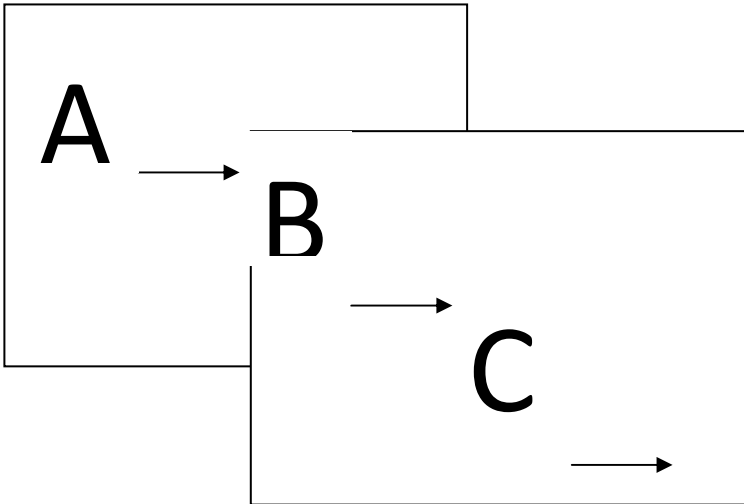
sodass man hierauf die semiotische Spuretheorie anwenden kann (vgl. Toth 2009)

$$SPZ = 1_2 \rightarrow 2_3 \rightarrow 3_1 = (\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \beta\alpha) \text{ für die Semiotik bzw.}$$

$$SPZ = 1_2 \rightarrow 2_3 \rightarrow 3_4 \rightarrow 4_5 \rightarrow \dots = (\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \rightarrow \alpha_3 \rightarrow \alpha_4 \rightarrow),$$

wobei PZ in der ersten Gleichung Primzeichen, in der zweiten Peano-Zahl bedeutet. Für Peano-Zahlen (und die Primzeichen als ihre Teilmenge) gilt also: Der Nachfolger (n+1) einer Spur  $n = A_{B \rightarrow}$  besteht in der Vertauschung von Domäne und Codomäne von n.

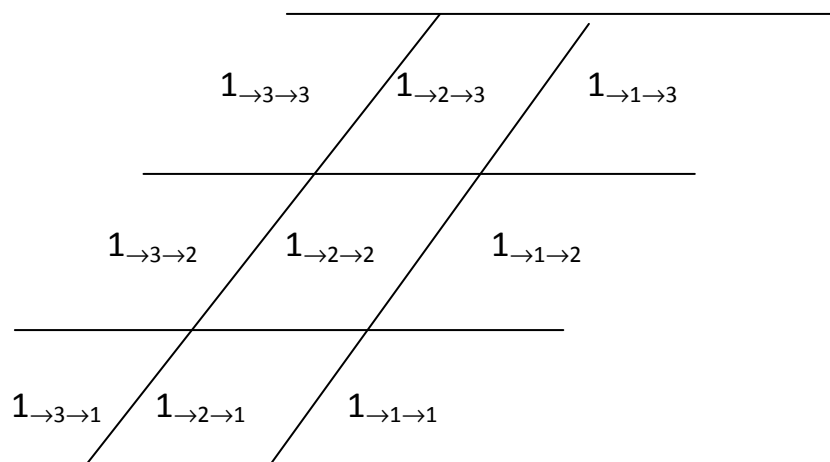
5. Wenn man nun 3-dimensionale Primzeichen benutzen will, braucht man Bi-Spuren, worunter Spuren verstanden seien, deren Codomänen wiederum Spuren sind. Die allgemeine Form von Bi-Spuren ist also



Eine Bi-Spur ist eine Spur einer Spur, so zwar, dass sowohl Domäne als auch Codomäne der Bi-Spur eine Spur sind, wobei die Codomäne von A die Domäne von B ist. Wenn wir aus technischen Gründen Bi-Spuren wie folgt schreiben

$$A_{\rightarrow B \rightarrow C},$$

dann kann man die Grundfläche des Steibingschen Zeichenkubus wie folgt in Form von Bi-Spuren notieren



## **Bibliographie**

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Das Universum der Zeichen. Baden-Baden 1983

Stiebing, Hans Michael, Zusammenfassungs- und Klassifikationsschemata von Wissenschaften und Theorien auf semiotischer und fundamentalkategorialer Basis. Diss. Stuttgart 1978

Toth, Alfred, Semiotische Strukturen und Prozesse. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Kleine Arithmetik der Zeichen- und Objektspuren. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009

### **17. Zur spuretheoretischen Begründung der semiotischen Basistheorie**

1. Die Semiotik kann mit Hilfe des Begriffs der Zahl, der Menge und der Kategorie begründet werden (vgl. Toth 2006, S. 11 ff.), also ganz genau wie alle übrigen Gebiete der Mathematik. Basierend auf den bisher veröffentlichten Arbeiten (vgl. z.B. Toth 2009a, b), sollen hier die spuretheoretischen Grundlagen der Semiotik zusammengefasst und ergänzt werden.

2. Spuren können entweder direkt aus den semiotischen Objekten, d.h. den Subzeichen, oder den sie substituierenden kategoriethoretischen Morphismen abgeleitet werden. Der Grund liegt in der von Bense immer wieder hervorgehobenen Doppelnatur der Subzeichen, einerseits statische „Momente“, andererseits aber dynamische „Semiosen“ zu sein (vgl. z.B. Bense 1975, S. 92). Der Unterschied zwischen semiotischen Kategorien und Spuren liegt allerdings, wie bereits öfters hervorgehoben wurde, darin, dass Spuren wegen ihrer gerichteten Codomänen „gerichtete Objekte“ sind, während Kategorien „gerichtete Abbildungen“, d.h. „Pfeile“ sind.

$$(1.1) = \text{id}1 \quad \rightarrow \quad 1_{\rightarrow 1}$$

$$(1.2) = \alpha \quad \rightarrow \quad 1_{\rightarrow 2}$$

$$(1.3) = \beta\alpha \quad \rightarrow \quad 1_{\rightarrow 3}$$

$$(2.1) = \alpha^\circ \quad \rightarrow \quad 2_{\rightarrow 1} = 1_{\leftarrow 2}$$

$$(2.2) = \text{id}2 \quad \rightarrow \quad 2_{\rightarrow 2}$$

$$(2.3) = \beta \quad \rightarrow \quad 2_{\rightarrow 3}$$

$$(3.1) = \alpha^\circ\beta^\circ \quad \rightarrow \quad 3_{\rightarrow 1} = 1_{\leftarrow 3}$$

$$(3.2) = \beta^\circ \quad \rightarrow \quad 3_{\rightarrow 2} = 2_{\leftarrow 3}$$

$$(3.3) = \text{id}3 \quad \rightarrow \quad 3_{\rightarrow 3}$$

Mit Hilfe dieser Entsprechungen können wir sog. Spurenmatrizen aufstellen:

$$\left( \begin{array}{c|ccc} \emptyset_{\rightarrow 1} & 1_{\rightarrow 1} & 1_{\rightarrow 2} & 1_{\rightarrow 3} \\ \emptyset_{\rightarrow 2} & 1_{\leftarrow 2} & 2_{\rightarrow 2} & 2_{\rightarrow 3} \\ \emptyset_{\rightarrow 3} & 1_{\rightarrow 3} & 2_{\leftarrow 3} & 3_{\rightarrow 3} \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc} 1_{\rightarrow \emptyset} & 2_{\rightarrow \emptyset} & 3_{\rightarrow \emptyset} \\ \hline 1_{\rightarrow 1} & 2_{\rightarrow 1} & 3_{\rightarrow 1} \\ 1_{\rightarrow 2} & 2_{\rightarrow 2} & 3_{\rightarrow 2} \\ 1_{\rightarrow 3} & 2_{\rightarrow 3} & 3_{\rightarrow 3} \end{array} \right)$$

3. Das System der Zeichenklassen und Realitätsthematiken lässt sich auf der Basis der Spurenmatrix als System von Zeichenspuren und Realitätsspuren konstruieren:

$$(3.1 \ 2.1 \ 1.1) \times (1.1 \ 1.2 \ 1.3) \quad \rightarrow \quad (3_{\rightarrow 1} \ 1_{\leftarrow 2} \ 1_{\rightarrow 1}) \times (1_{\rightarrow 1} \ 1_{\rightarrow 2} \ 1_{\rightarrow 3})$$

$$(3.1 \ 2.1 \ 1.2) \times (2.1 \ 1.2 \ 1.3) \quad \rightarrow \quad (3_{\rightarrow 1} \ 1_{\leftarrow 2} \ 1_{\rightarrow 2}) \times (1_{\leftarrow 2} \ 1_{\rightarrow 2} \ 1_{\rightarrow 3})$$

$$(3.1 \ 2.1 \ 1.3) \times (3.1 \ 1.2 \ 1.3) \quad \rightarrow \quad (3_{\rightarrow 1} \ 1_{\leftarrow 2} \ 1_{\rightarrow 3}) \times (3_{\rightarrow 1} \ 1_{\rightarrow 2} \ 1_{\rightarrow 3})$$

$$(3.1 \ 2.2 \ 1.2) \times (2.1 \ 2.2 \ 1.3) \quad \rightarrow \quad (3_{\rightarrow 1} \ 2_{\rightarrow 2} \ 1_{\rightarrow 2}) \times (1_{\leftarrow 2} \ 2_{\rightarrow 2} \ 1_{\rightarrow 3})$$



$$(3.1\ 2.2\ 1.3) \times (3.1\ 2.2\ 1.3) \rightarrow (3_{\rightarrow 1}\ 2_{\rightarrow 2}\ 1_{\rightarrow 3}) \times (3_{\rightarrow 1}\ 2_{\rightarrow 2}\ 1_{\rightarrow 3})$$

$$(3.1\ 2.3\ 1.3) \times (3.1\ 3.2\ 1.3) \rightarrow (3_{\rightarrow 1}\ 2_{\rightarrow 3}\ 1_{\rightarrow 3}) \times (3_{\rightarrow 1}\ 2_{\leftarrow 3}\ 1_{\rightarrow 3})$$

$$(3.2\ 2.2\ 1.2) \times (2.1\ 2.2\ 2.3) \rightarrow (2_{\leftarrow 3}\ 2_{\rightarrow 2}\ 1_{\rightarrow 2}) \times (1_{\leftarrow 2}\ 2_{\rightarrow 2}\ 2_{\rightarrow 3})$$

$$(3.2\ 2.2\ 1.3) \times (3.1\ 2.2\ 2.3) \rightarrow (2_{\leftarrow 3}\ 2_{\rightarrow 2}\ 1_{\rightarrow 3}) \times (3_{\rightarrow 1}\ 2_{\rightarrow 2}\ 2_{\rightarrow 3})$$

$$(3.2\ 2.3\ 1.3) \times (3.1\ 3.2\ 2.3) \rightarrow (2_{\leftarrow 3}\ 2_{\rightarrow 3}\ 1_{\rightarrow 3}) \times (3_{\rightarrow 1}\ 2_{\leftarrow 3}\ 2_{\rightarrow 3})$$

$$(3.3\ 2.3\ 1.3) \times (3.1\ 3.2\ 3.3) \rightarrow (3_{\rightarrow 3}\ 2_{\rightarrow 3}\ 1_{\rightarrow 3}) \times (3_{\rightarrow 1}\ 2_{\leftarrow 3}\ 3_{\rightarrow 3})$$

4. Interessanter sieht die Verteilung von Domänen- und Codomänen-Werten bei den 6 Permutationen je Zeichenklasse bzw. Realitätsthematik aus, vgl. z.B.

$$(1_{\leftarrow 3}\ 1_{\leftarrow 2}\ 1_{\rightarrow 3}) \times (1_{\leftarrow 3}\ 1_{\rightarrow 2}\ 1_{\rightarrow 3})$$

$$(1_{\leftarrow 3}\ 1_{\rightarrow 3}\ 1_{\leftarrow 2}) \times (1_{\rightarrow 2}\ 1_{\leftarrow 3}\ 1_{\rightarrow 3})$$

$$(1_{\leftarrow 2}\ 1_{\leftarrow 3}\ 1_{\rightarrow 3}) \times (1_{\leftarrow 3}\ 1_{\rightarrow 3}\ 1_{\rightarrow 2})$$

$$(1_{\leftarrow 2}\ 1_{\rightarrow 3}\ 1_{\leftarrow 3}) \times (1_{\rightarrow 3}\ 1_{\leftarrow 3}\ 1_{\rightarrow 2})$$

$$(1_{\rightarrow 3}\ 1_{\leftarrow 3}\ 1_{\leftarrow 2}) \times (1_{\rightarrow 2}\ 1_{\rightarrow 3}\ 1_{\leftarrow 3})$$

$$(1_{\rightarrow 3}\ 1_{\leftarrow 2}\ 1_{\leftarrow 3}) \times (1_{\rightarrow 3}\ 1_{\rightarrow 2}\ 1_{\leftarrow 3})$$

Zu den semiotischen Diamanten vgl. Toth (2008, S. 177 ff.).

## Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006, 2. Aufl. 2008

Toth, Alfred, Semiotische Strukturen und Prozesse. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Kategorien aus Objekten und Spuren aus Kategorien. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009a

## 18. n-Spuren über austauschbaren Domänen und Codomänen

1. In Toth (2009a) hatten wir gezeigt, dass man, wenn man Domänen und Codomänen von 1-Objekten austauscht, 8 verschiedene Morphismen erhält:

1.  $(A \rightarrow B)$                       5.  $(A \rightleftharpoons B)$

2.  $(A \leftarrow B)$                       6.  $(A \leftrightsquigarrow B)$

3.  $(B \rightarrow A)$                       7.  $(B \rightleftharpoons A)$

4.  $(B \leftarrow A)$                       8.  $(B \leftrightsquigarrow A)$

Da man Morphismen in Spuren übersetzen kann (Toth 2009e), haben wir

1.  $(A \rightarrow_B)$                       5.  $(A \rightleftharpoons_B)$

2.  $(A \leftarrow_B)$                       6.  $(A \leftrightsquigarrow_B)$

3.  $(B \rightarrow_A)$                       7.  $(B \rightleftharpoons_A)$

4.  $(B \leftarrow_A)$                       8.  $(B \leftrightsquigarrow_A)$

Wir haben also z.B. für das Subzeichen (2.3)

1.  $(2 \rightarrow_3)$                                       9.  $(2 \rightleftharpoons_3)$

2.  $(2 \leftarrow_3)$                                       10.  $(2 \leftrightsquigarrow_3)$

3.  $(3 \rightarrow_2)$                                       11.  $(3 \rightleftharpoons_2)$

4.  $(3 \leftarrow_2)$                                       12.  $(3 \leftrightsquigarrow_2)$

$$5. \times(2 \rightarrow_3) = (3 \rightarrow_2) \quad 13. \times(2 \rightleftharpoons_3) = (3 \rightleftharpoons_2)$$

$$6. \times(2 \leftarrow_3) = (3 \leftarrow_2) \quad 14. \times(2 \rightleftharpoons_3) = (3 \rightleftharpoons_2)$$

$$7. \times(3 \rightarrow_2) = (2 \rightarrow_3) \quad 15. \times(3 \rightleftharpoons_2) = (2 \rightleftharpoons_3)$$

$$8. \times(3 \leftarrow_2) = (2 \leftarrow_3) \quad 16. \times(3 \rightleftharpoons_2) = (2 \rightleftharpoons_3)$$

Wenn man als Objekte die von Bense (1980) eingeführten Primzeichen setzt, dann erhält man z.B. für  $A = 1$  und  $B = 2$ :

$$1. (1 \rightarrow 2) \equiv \alpha^{\rightarrow} \quad 9. \times(1 \rightarrow 2) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}$$

$$2. (1 \leftarrow 2) \equiv \alpha^{\leftarrow} \quad 10. \times(1 \leftarrow 2) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}$$

$$3. (2 \rightarrow 1) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow} \quad 11. \times(2 \rightarrow 1) \equiv \alpha^{\rightarrow}$$

$$4. (2 \leftarrow 1) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} \quad 12. \times(2 \leftarrow 1) \equiv \alpha^{\leftarrow}$$

$$5. (1 \rightleftharpoons 2) \equiv \alpha^{\rightarrow}\alpha^{\leftarrow} \quad 13. \times(1 \rightleftharpoons 2) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}\alpha^{\circ\leftarrow}$$

$$6. (1 \rightleftharpoons 2) \equiv \alpha^{\leftarrow}\alpha^{\rightarrow} \quad 14. \times(1 \rightleftharpoons 2) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\alpha^{\circ\rightarrow}$$

$$7. (2 \rightleftharpoons 1) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}\alpha^{\circ\leftarrow} \quad 15. \times(2 \rightleftharpoons 1) \equiv \alpha^{\rightarrow}\alpha^{\leftarrow}$$

$$8. (2 \rightleftharpoons 1) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}\alpha^{\circ\rightarrow} \quad 16. \times(2 \rightleftharpoons 1) \equiv \alpha^{\leftarrow}\alpha^{\rightarrow}$$

Die Menge der Primzeichen  $PZ = (.1., .2., .3.)$  bilden also zusammen mit den Abbildungen und Kompositionen eine semiotische 1-Kategorie (vgl. Toth 2009a-d). Zum Nachweis, dass  $PZ$  auch eine semiotische 1-Spur bildet, genüge die folgende Tabelle:

$$1. (1 \rightarrow_2) \equiv \alpha^{\rightarrow} \quad 9. \times(1 \rightarrow_2) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow}$$

$$2. (1 \leftarrow_2) \equiv \alpha^{\leftarrow} \quad 10. \times(1 \leftarrow_2) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow}$$

$$3. (2 \rightarrow_1) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow} \quad 11. \times(2 \rightarrow_1) \equiv \alpha^{\rightarrow}$$

$$4. (2 \leftarrow_1) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} \quad 12. \times(2 \leftarrow_1) \equiv \alpha^{\leftarrow}$$

$$\begin{array}{ll}
5. (1 \Rightarrow 2) \equiv \alpha^{\rightarrow} \alpha^{\leftarrow} & 13. \times(1 \Rightarrow 2) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow} \alpha^{\circ\leftarrow} \\
6. (1 \Leftarrow 2) \equiv \alpha^{\leftarrow} \alpha^{\rightarrow} & 14. \times(1 \Leftarrow 2) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} \alpha^{\circ\rightarrow} \\
7. (2 \Rightarrow 1) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow} \alpha^{\circ\leftarrow} & 15. \times(2 \Rightarrow 1) \equiv \alpha^{\rightarrow} \alpha^{\leftarrow} \\
8. (2 \Leftarrow 1) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} \alpha^{\circ\rightarrow} & 16. \times(2 \Leftarrow 1) \equiv \alpha^{\leftarrow} \alpha^{\rightarrow}
\end{array}$$

2. Nun kann man in einem nächsten Schritt die Primzeichen auf Subzeichen, d.h. auf Relationen der Form (a.b) mit  $a \in \{1., 2., 3.\}$  und  $b \in \{.1, .2, .3\}$ , was nichts anderes ist als die Menge der kartesischen Produkte einer  $3 \times 3$ -Matrix, abbilden. Allgemein haben wir dann in der Form von Kategorien

$$\begin{array}{ll}
1. (A \rightarrow (AB)) \equiv \text{id} \alpha^{\rightarrow} \alpha^{\rightarrow} & 9. (A \rightleftarrows (AB)) \equiv \text{id} \alpha^{\rightarrow} \alpha^{\rightarrow} \text{id} \alpha^{\leftarrow} \alpha^{\leftarrow} \\
2. (B \rightarrow (AB)) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow} \text{id} \beta^{\rightarrow} & 10. (B \rightleftarrows (AB)) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow} \text{id} \beta^{\rightarrow} \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id} \beta^{\leftarrow} \\
3. (A \leftarrow (AB)) \equiv \text{id} \alpha^{\leftarrow} \alpha^{\leftarrow} & 11. (A \leftrightarrows (AB)) \equiv \text{id} \alpha^{\leftarrow} \alpha^{\leftarrow} \text{id} \alpha^{\rightarrow} \alpha^{\rightarrow} \\
4. (B \leftarrow (AB)) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id} \beta^{\leftarrow} & 12. (B \leftrightarrows (AB)) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id} \beta^{\leftarrow} \alpha^{\circ\rightarrow} \text{id} \beta^{\rightarrow} \\
5. ((AB) \rightarrow A) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id} \beta^{\leftarrow} & 13. ((AB) \rightleftarrows A) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id} \beta^{\leftarrow} \alpha^{\circ\rightarrow} \text{id} \beta^{\rightarrow} \\
6. ((AB) \rightarrow B) \equiv \alpha^{\rightarrow} \text{id} \beta^{\rightarrow} & 14. ((AB) \rightleftarrows B) \equiv \alpha^{\rightarrow} \text{id} \beta^{\rightarrow} \alpha^{\leftarrow} \text{id} \beta^{\leftarrow} \\
7. ((AB) \leftarrow A) \equiv \text{id} \alpha^{\leftarrow} \alpha^{\circ\leftarrow} & 15. ((AB) \leftrightarrows A) \equiv \text{id} \alpha^{\leftarrow} \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id} \alpha^{\rightarrow} \alpha^{\circ\rightarrow} \\
8. ((AB) \leftarrow B) \equiv \alpha^{\leftarrow} \text{id} \beta^{\leftarrow} & 16. ((AB) \leftrightarrows B) \equiv \alpha^{\leftarrow} \text{id} \beta^{\leftarrow} \alpha^{\rightarrow} \text{id} \beta^{\rightarrow}
\end{array}$$

Der Vorteil dieses kategorialen Verfahrens ist, dass Subzeichen immer als kartesische Produkte ihrer Primzeichen behandelt werden und dass damit die Paradoxien der „klassischen“ semiotischen Kategoriethorie von Bense, Leopold usw. eliminiert werden können. Für diese galt nämlich z.B. (vgl. z.B. Leopold 1990)

$$(.2) \rightarrow (.3) \equiv \beta$$

$$(1.2) \rightarrow (1.3) \equiv \beta,$$

d.h. Subzeichen wurden nicht von Primzeichen unterschieden. Streng genommen verunmöglicht es dieses Verfahrens also, z.B. die Morphismen zwischen

$$(1.2) \rightarrow (2.3)$$

zu bestimmen. Das Verfahren

$$(1.2) \rightarrow (2.3) = [[[ (1 \rightarrow 2), (1 \rightarrow 3) ], [(2 \rightarrow 2), (2 \rightarrow 3)]]] = [(\alpha, \beta\alpha), (id_2, \beta)]$$

wurde erst in Toth (2008, S. 159 ff.) eingeführt. Ferner war es im „klassischen“ System unmöglich, zwischen Objekten und Morphismen streng zu unterscheiden, und dies ist ja gerade in der Semiotik wichtig, wo ein Subzeichen einerseits eine statische Entität, andererseits eine dynamische Semiose darstellt. Ein Subzeichen wie (2.3) ist aber nach Bense immer durch den Morphismus  $\beta$  zu beschreiben.

Dieselben Paradoxien vermeidet auch die Spuretheorie. Zum Aufweis der semiotischen Äquivalenz von Kategorien und Spuren und damit zur Existenz von 2-Spuren genüge wieder die folgende Tabelle:

- |  |  |
|--|--|
| 1. $(A \rightarrow_{(AB)}) \equiv id\alpha^{\rightarrow} \alpha^{\rightarrow}$     | 9. $(A \rightleftharpoons_{(AB)}) \equiv id\alpha^{\rightarrow} \alpha^{\rightarrow} id\alpha^{\leftarrow} \alpha^{\leftarrow}$            |
| 2. $(B \rightarrow_{(AB)}) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow} id\beta^{\rightarrow}$ | 10. $(B \rightleftharpoons_{(AB)}) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow} id\beta^{\rightarrow} \alpha^{\circ\leftarrow} id\beta^{\leftarrow}$   |
| 3. $(A \leftarrow_{(AB)}) \equiv id\alpha^{\leftarrow} \alpha^{\leftarrow}$        | 11. $(A \leftrightsquigarrow_{(AB)}) \equiv id\alpha^{\leftarrow} \alpha^{\leftarrow} id\alpha^{\rightarrow} \alpha^{\rightarrow}$         |
| 4. $(B \leftarrow_{(AB)}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} id\beta^{\leftarrow}$    | 12. $(B \leftrightsquigarrow_{(AB)}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} id\beta^{\leftarrow} \alpha^{\circ\rightarrow} id\beta^{\rightarrow}$ |
| 5. $((AB) \rightarrow_A) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} id\beta^{\leftarrow}$     | 13. $((AB) \rightleftharpoons_A) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} id\beta^{\leftarrow} \alpha^{\circ\rightarrow} id\beta^{\rightarrow}$     |
| 6. $((AB) \rightarrow_B) \equiv \alpha^{\rightarrow} id\beta^{\rightarrow}$        | 14. $((AB) \rightleftharpoons_B) \equiv \alpha^{\rightarrow} id\beta^{\rightarrow} \alpha^{\leftarrow} id\beta^{\leftarrow}$               |
| 7. $((AB) \leftarrow_A) \equiv id\alpha^{\leftarrow} \alpha^{\circ\leftarrow}$     | 15. $((AB) \leftrightsquigarrow_A) \equiv id\alpha^{\leftarrow} \alpha^{\circ\leftarrow} id\alpha^{\rightarrow} \alpha^{\circ\rightarrow}$ |
| 8. $((AB) \leftarrow_B) \equiv \alpha^{\leftarrow} id\beta^{\leftarrow}$           | 16. $((AB) \leftrightsquigarrow_B) \equiv \alpha^{\leftarrow} id\beta^{\leftarrow} \alpha^{\rightarrow} id\beta^{\rightarrow}$             |

3. So kann man nun weiterfahren und nach 1-Kategorien und 2-Kategorien auch höhere semiotischen Kategorien und ihnen entsprechend höhere n-Spuren bilden, z.B.

1-Kat.:  $\{(PZ \rightarrow PZ), (SZ \rightarrow SZ), (ZKL/RTH \rightarrow ZKL/RTH), \dots\}$

2-Kat.:  $\{(PZ \rightarrow SZ), (PZ \rightarrow ZKL/RTH), (PZ \rightarrow \text{Trich. Tr.})\}$

3-Kat.:  $\{(SZ \rightarrow ZKL/RTH), (SZ \rightarrow \text{Tr.Tr.})\}$

4-Kat.:  $\{(ZKL/RTH \rightarrow \text{Tr. Tr.})\}$

...

### **Bibliographie**

Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: *Ars Semeiotica* 3/3, 1980, S. 287-294

Leopold, Cornelia, Kategoriethoretische Konzeption der Semiotik. In: *Semiosis* 57/58, 1990, S. 93-100

Toth, Alfred, *Semiotische Strukturen und Prozesse*. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Semiotische Kategorien und Bikategorien I. In: *Electronic Journal of Mathematical Semiotics*, 2009a

Toth, Alfred, Semiotische Kategorien und Bikategorien II. In: *Electronic Journal of Mathematical Semiotics*, 2009b

Toth, Alfred, Übersicht über semiotische n-Kategorien. In: *Electronic Journal of Mathematical Semiotics*, 2009c

Toth, Alfred, Zeichenklassen, definiert über austauschbaren Domänen und Codomänen. In: *Electronic Journal of Mathematical Semiotics*, 2009d

Toth, Alfred, Zur spuretheoretischen Begründung der semiotischen Basistheorie. In: *Electronic Journal of Mathematical Semiotics*, 2009e

## 19. Von Objekten zu Pfeilen und von Pfeilen zu Spuren

1. Bekannt ist die Aussage Saunders Mac Lanes, der Mitbegründers der Kategorietheorie, dass man diese auch „als Behandlung des Problems auffassen [könne], wie man ohne Elemente auskommen und statt ihrer Pfeile benutzen“ könne (1972, S. iii). Da die semiotischen Subzeichen zugleich entitatische Momente und dynamische Semiosen sind (vgl. Bense 1975, S. 92), also eine ähnliche Doppelnatur zeigen wie die Elektronen, kann man sie als Objekte im Sinne der Mengentheorie oder als Abbildungen im Sinne der Kategorietheorie beschreiben (vgl. Toth 1997, S. 21 ff.). Die in Toth (2009a) eingeführten Spuren sind als „gerichtete Objekte“ zu verstehen, stehen also der Objektauffassung der Subzeichen und Zeichenklassen näher als die Morphismen der semiotischen Kategorien. In dem vorliegenden Kapitel wird allerdings ein neues Verfahren gezeigt, wie man auch Spuren, obwohl sie ja gerade auf dem Objektbegriff, und das heisst, primär statisch, eingeführt worden sind, weitgehend von ihrer Substanz befreien und daher einem dynamischen Abbildungsbegriff annähern kann. Allerdings bestehen zwischen diesem erweiterten Spurbegriff und dem Begriff der kategoriellen Abbildung etwa so viele Gemeinsamkeiten wie Unterschiede, womit sie immerhin jedenfalls nicht gegenseitig ersetzbar sind.

2. In Toth (2009b) hatten wir gezeigt, dass man, wenn man Domänen und Codomänen von 1-Objekten austauscht, 2mal 8 verschiedene Morphismen erhält. Sei  $x := (A \rightarrow B)$  mit  $A = 1$  und  $B = 2$ , dann gilt:

- |   |  |
|---|--|
| 1. $(1 \rightarrow 2) \equiv \alpha^{\rightarrow}$                          | 9. $\times(1 \rightarrow 2) \equiv \alpha^{o\rightarrow}$                            |
| 2. $(1 \leftarrow 2) \equiv \alpha^{\leftarrow}$                            | 10. $\times(1 \leftarrow 2) \equiv \alpha^{o\leftarrow}$                             |
| 3. $(2 \rightarrow 1) \equiv \alpha^{o\rightarrow}$                         | 11. $\times(2 \rightarrow 1) \equiv \alpha^{\rightarrow}$                            |
| 4. $(2 \leftarrow 1) \equiv \alpha^{o\leftarrow}$                           | 12. $\times(2 \leftarrow 1) \equiv \alpha^{\leftarrow}$                              |
| 5. $(1 \rightrightarrows 2) \equiv \alpha^{\rightarrow}\alpha^{\leftarrow}$ | 13. $\times(1 \rightrightarrows 2) \equiv \alpha^{o\rightarrow}\alpha^{o\leftarrow}$ |
| 6. $(1 \leftrightarrows 2) \equiv \alpha^{\leftarrow}\alpha^{\rightarrow}$  | 14. $\times(1 \leftrightarrows 2) \equiv \alpha^{o\leftarrow}\alpha^{o\rightarrow}$  |

$$7. (2 \rightrightarrows 1) \equiv \alpha^{\circ \rightarrow} \alpha^{\circ \leftarrow} \quad 15. \times(2 \rightrightarrows 1) \equiv \alpha^{\rightarrow} \alpha^{\leftarrow}$$

$$8. (2 \leftrightsquigarrow 1) \equiv \alpha^{\circ \leftarrow} \alpha^{\circ \rightarrow} \quad 16. \times(2 \leftrightsquigarrow 1) \equiv \alpha^{\leftarrow} \alpha^{\rightarrow}$$

Wenn wir die Domänen der Spuren eliminieren, erhalten wir:

$$1. (\rightarrow_2) \equiv \alpha^{\rightarrow} \quad 9. \times(\rightarrow_2) \equiv \alpha^{\circ \rightarrow}$$

$$2. (\leftarrow_2) \equiv \alpha^{\leftarrow} \quad 10. \times(\leftarrow_2) \equiv \alpha^{\circ \leftarrow}$$

$$3. (\rightarrow_1) \equiv \alpha^{\circ \rightarrow} \quad 11. \times(\rightarrow_1) \equiv \alpha^{\rightarrow}$$

$$4. (\leftarrow_1) \equiv \alpha^{\circ \leftarrow} \quad 12. \times(\leftarrow_1) \equiv \alpha^{\leftarrow}$$

$$5. (= 2) \equiv \alpha^{\rightarrow} \alpha^{\leftarrow} \quad 13. \times(= 2) \equiv \alpha^{\circ \rightarrow} \alpha^{\circ \leftarrow}$$

$$6. (\leftrightsquigarrow 2) \equiv \alpha^{\leftarrow} \alpha^{\rightarrow} \quad 14. \times(\leftrightsquigarrow 2) \equiv \alpha^{\circ \leftarrow} \alpha^{\circ \rightarrow}$$

$$7. (= 1) \equiv \alpha^{\circ \rightarrow} \alpha^{\circ \leftarrow} \quad 15. \times(= 1) \equiv \alpha^{\rightarrow} \alpha^{\leftarrow}$$

$$8. (\leftrightsquigarrow 1) \equiv \alpha^{\circ \leftarrow} \alpha^{\circ \rightarrow} \quad 16. \times(\leftrightsquigarrow 1) \equiv \alpha^{\leftarrow} \alpha^{\rightarrow}$$

d.h. in der linken und in der rechten Spalte stehen gleiche 1-Spuren verschiedenen 1-Morphismen(kombinationen) gegenüber. Spuren sind daher weniger differenziert als Abbildungen.

2. Nun kann man in einem nächsten Schritt die Primzeichen auf Subzeichen, d.h. auf Relationen der Form  $(a.b)$  mit  $a \in \{1., 2., 3.\}$  und  $b \in \{.1, .2, .3\}$ , was nichts anderes ist als die Menge der kartesischen Produkte einer  $3 \times 3$ -Matrix, abbilden. Allgemein haben wir dann in der Form von Kategorien

$$1. (A \rightarrow (AB)) \equiv \text{id} \alpha^{\rightarrow} \alpha^{\rightarrow} \quad 9. (A \rightrightarrows (AB)) \equiv \text{id} \alpha^{\rightarrow} \alpha^{\rightarrow} \text{id} \alpha^{\leftarrow} \alpha^{\leftarrow}$$

$$2. (B \rightarrow (AB)) \equiv \alpha^{\circ \rightarrow} \text{id} \beta^{\rightarrow} \quad 10. (B \rightrightarrows (AB)) \equiv \alpha^{\circ \rightarrow} \text{id} \beta^{\rightarrow} \alpha^{\circ \leftarrow} \text{id} \beta^{\leftarrow}$$

$$3. (A \leftarrow (AB)) \equiv \text{id} \alpha^{\leftarrow} \alpha^{\leftarrow} \quad 11. (A \leftrightsquigarrow (AB)) \equiv \text{id} \alpha^{\leftarrow} \alpha^{\leftarrow} \text{id} \alpha^{\rightarrow} \alpha^{\rightarrow}$$

$$4. (B \leftarrow (AB)) \equiv \alpha^{\circ \leftarrow} \text{id} \beta^{\leftarrow} \quad 12. (B \leftrightsquigarrow (AB)) \equiv \alpha^{\circ \leftarrow} \text{id} \beta^{\leftarrow} \alpha^{\circ \rightarrow} \text{id} \beta^{\rightarrow}$$



- |   |   |
|---|---|
| 5. $((AB) \rightarrow A) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id}\beta^{\leftarrow}$ | 13. $((AB) \rightrightarrows A) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id}\beta^{\leftarrow} \alpha^{\circ\rightarrow} \text{id}\beta^{\rightarrow}$ |
| 6. $((AB) \rightarrow B) \equiv \alpha^{\rightarrow} \text{id}\beta^{\rightarrow}$    | 14. $((AB) \rightrightarrows B) \equiv \alpha^{\rightarrow} \text{id}\beta^{\rightarrow} \alpha^{\leftarrow} \text{id}\beta^{\leftarrow}$           |
| 7. $((AB) \leftarrow A) \equiv \text{id}\alpha^{\leftarrow} \alpha^{\circ\leftarrow}$ | 15. $((AB) \Leftrightarrow A) \equiv \text{id}\alpha^{\leftarrow} \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id}\alpha^{\rightarrow} \alpha^{\circ\rightarrow}$ |
| 8. $((AB) \leftarrow B) \equiv \alpha^{\leftarrow} \text{id}\beta^{\leftarrow}$       | 16. $((AB) \Leftrightarrow B) \equiv \alpha^{\leftarrow} \text{id}\beta^{\leftarrow} \alpha^{\rightarrow} \text{id}\beta^{\rightarrow}$             |

Damit ist die Existenz semiotischer 2-Kategorien (und 2-Morphismen) nachgewiesen. Der Nachweis semiotischer 2-Spuren erfolgt so:

- |   |   |
|---|---|
| 1. $(\rightarrow_{(AB)}) \equiv \text{id}\alpha^{\rightarrow} \alpha^{\rightarrow}$     | 9. $(\rightrightarrows_{(AB)}) \equiv \text{id}\alpha^{\rightarrow} \alpha^{\rightarrow} \text{id}\alpha^{\leftarrow} \alpha^{\leftarrow}$          |
| 2. $(\rightarrow_{(AB)}) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow} \text{id}\beta^{\rightarrow}$ | 10. $(\rightrightarrows_{(AB)}) \equiv \alpha^{\circ\rightarrow} \text{id}\beta^{\rightarrow} \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id}\beta^{\leftarrow}$ |
| 3. $(\leftarrow_{(AB)}) \equiv \text{id}\alpha^{\leftarrow} \alpha^{\leftarrow}$        | 11. $(\Leftrightarrow_{(AB)}) \equiv \text{id}\alpha^{\leftarrow} \alpha^{\leftarrow} \text{id}\alpha^{\rightarrow} \alpha^{\rightarrow}$           |
| 4. $(\leftarrow_{(AB)}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id}\beta^{\leftarrow}$    | 12. $(\Leftrightarrow_{(AB)}) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id}\beta^{\leftarrow} \alpha^{\circ\rightarrow} \text{id}\beta^{\rightarrow}$   |
| 5. $(\rightarrow_A) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id}\beta^{\leftarrow}$        | 13. $(\rightrightarrows_A) \equiv \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id}\beta^{\leftarrow} \alpha^{\circ\rightarrow} \text{id}\beta^{\rightarrow}$      |
| 6. $(\rightarrow_B) \equiv \alpha^{\rightarrow} \text{id}\beta^{\rightarrow}$           | 14. $(\rightrightarrows_B) \equiv \alpha^{\rightarrow} \text{id}\beta^{\rightarrow} \alpha^{\leftarrow} \text{id}\beta^{\leftarrow}$                |
| 7. $(\leftarrow_A) \equiv \text{id}\alpha^{\leftarrow} \alpha^{\circ\leftarrow}$        | 15. $(\Leftrightarrow_A) \equiv \text{id}\alpha^{\leftarrow} \alpha^{\circ\leftarrow} \text{id}\alpha^{\rightarrow} \alpha^{\circ\rightarrow}$      |
| 8. $(\leftarrow_B) \equiv \alpha^{\leftarrow} \text{id}\beta^{\leftarrow}$              | 16. $(\Leftrightarrow_B) \equiv \alpha^{\leftarrow} \text{id}\beta^{\leftarrow} \alpha^{\rightarrow} \text{id}\beta^{\rightarrow}$                  |

Das Resultat ist erwartungsgemäss dasselbe wie in Abschnitt 1: Die Hälfte der so erzeugten Spuren ist redundant. Dasselbe gilt praemissis praemittendis, wenn wir zu 3-, 4-, ..., n-Spuren aufsteigen.

3. In einer mehr inhaltlichen Klassifikation haben wir also:

3.1. Zkl<sub>n</sub>-Spuren neben Spuren-Zkl<sub>n</sub>

$$\text{Zkl}_{\text{Sp}} = (3 \rightarrow_a 2 \rightarrow_b 1 \rightarrow_c)$$

$$\text{Sp}_{\text{Zkl}} = (\rightarrow_a \rightarrow_b \rightarrow_c) \equiv (\rightarrow_{a_1} \rightarrow_{b_2} \rightarrow_{c_3})$$

### 3.2. Rthn-Spuren neben Spuren-Rthn

$$\text{Rth}_{\text{Sp}} = (1 \leftarrow c \ 2 \leftarrow b \ 3 \leftarrow a)$$

$$\text{Sp}_{\text{Rth}} = (\leftarrow c \ \leftarrow b \ \leftarrow a) \equiv (\leftarrow c_1 \ \leftarrow b_2 \ \leftarrow a_3)$$

### 3.3. Zeichenobjekt-Spuren neben Objektzeichen-Spuren

$$\text{ZO}_{\text{Sp}} = (\langle M, m \rangle \rightarrow a, \langle O, \Omega \rangle \rightarrow b, \langle I, \mathcal{J} \rangle \rightarrow c)$$

$$\text{OZ}_{\text{Sp}} = (\langle m, M \rangle \rightarrow a, \langle \Omega, O \rangle \rightarrow b, \langle \mathcal{J}, I \rangle \rightarrow c)$$

### 3.4. Spuren-Zeichenobjekte neben Spuren-Objektzeichen

$$\text{ZO}_{\text{Sp}} = (\rightarrow a \ \langle M, m \rangle, \rightarrow b \ \langle O, \Omega \rangle, \rightarrow c \ \langle I, \mathcal{J} \rangle)$$

$$\text{OZ}_{\text{Sp}} = (\rightarrow a \ \langle m, M \rangle, \rightarrow b \ \langle \Omega, O \rangle, \rightarrow c \ \langle \mathcal{J}, I \rangle)$$

### 3.5. Objekt-Spuren neben Spuren-Objekten

$$\text{OR}_{\text{Sp}} = (m \rightarrow a, \Omega \rightarrow b, \mathcal{J})$$

$$\text{Sp}_{\text{OR}} = (\rightarrow a, \rightarrow b, \rightarrow c) \equiv (\rightarrow a \ m, \rightarrow b \ \Omega, \rightarrow c \ \mathcal{J})$$

Um es einmal mehr zu betonen: Ein Zeichen ist keine Spur, und eine Spur ist kein Zeichen. In Sonderheit ist eine Spur auch kein Index, wie dies sowohl Eco als auch Bense angenommen haben. Eine Spur ist die Basis eines Rekonstruktes. Als solches ist sie primär ein Objekt und hat sekundär eine Verweisfunktion. Wohin sie verweist, ist jedoch offen: Neben

$$(\rightarrow a m, \rightarrow b \Omega, \rightarrow c \mathcal{J})$$

sind z.B. auch

$$(\rightarrow a \Omega, \rightarrow b m, \rightarrow c \mathcal{J})$$

$$(\rightarrow a \mathcal{J}, \rightarrow b \mathcal{J}, \rightarrow c \mathcal{J})$$

$(\rightarrow a_\Omega, \rightarrow b_\Omega, \rightarrow c_m)$ , usw.

denkbar. Damit haben die Spuren, obwohl sie nur die Hälfte der Differenzierungen zwischen Domänen und Codomänen der Morphismen abzudecken vermögen, eine enorm grössere Bewegungsfreiheit bei der Rekonstruktion von Zeichen, denn gerade weil sie nicht alle kategoriethoretischen Fälle abzudecken vermögen, können sie viel mehr mögliche Kombinationen eingehen als jene. Die Abbildung von Morphismen auf semiotische Objekte ist bijektiv; die Abbildung von Spuren auf semiotische Objekte ist injektiv.

### **Bibliographie**

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Mac Lane, Saunders, Kategorien. Berlin 1972

Toth, Alfred, Entwurf einer semiotisch-relationalen Grammatik. Tübingen 1997

Toth, Alfred, Zur spurenthoretischen Begründung der semiotischen Basistheorie.  
In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009a

Toth, Alfred, n-Spuren über austauschbaren Domänen und Codomänen. In:  
Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009b

## **20. Spurentransformationsmatrizen**

1. Der Begriff der Spurenmatrize wurde in Toth (2009) in die Semiotik eingeführt. Man beachte, dass jedes Subzeichen der Form

$$S_z = (a.b)$$

in Form der folgenden 4 Spuren notiert werden kann

$$(a \rightarrow b), (a \leftarrow b), (b \rightarrow a), (b \leftarrow a),$$

wobei die beiden letzteren die zu den beiden ersten dualen Spuren sind. Eine vollständige Übersicht über die Subzeichen und ihre Dualen liefern die

Spurenmatrix und ihre Transponierte. Die je drei Nullzeichen, durch welche die Peircsesche Zeichenrelation in eine tetradisch-trichotomische Relation transformierbar ist, wurden hier blockartig abgetrennt:

$$\left( \begin{array}{c|ccc} \emptyset_{\rightarrow 1} & 1_{\rightarrow 1} & 1_{\rightarrow 2} & 1_{\rightarrow 3} \\ \emptyset_{\rightarrow 2} & 1_{\leftarrow 2} & 2_{\rightarrow 2} & 2_{\rightarrow 3} \\ \emptyset_{\rightarrow 3} & 1_{\leftarrow 3} & 2_{\leftarrow 3} & 3_{\rightarrow 3} \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{c|c|c} 1_{\rightarrow \emptyset} & 2_{\rightarrow \emptyset} & 3_{\rightarrow \emptyset} \\ \hline 1_{\rightarrow 1} & 1_{\leftarrow 2} & 1_{\leftarrow 3} \\ 1_{\rightarrow 2} & 2_{\rightarrow 2} & 2_{\leftarrow 3} \\ 1_{\rightarrow 3} & 2_{\rightarrow 3} & 3_{\rightarrow 3} \end{array} \right)^T$$

2. Das System der Zeichenklassen und Realitätsthematiken lässt sich auf der Basis der Spurenmatrix als System von Zeichenspuren und Realitätsspuren konstruieren:

$$(3.1 \ 2.1 \ 1.1) \times (1.1 \ 1.2 \ 1.3) \rightarrow (1_{\leftarrow 3} \ 1_{\leftarrow 2} \ 1_{\rightarrow 1}) \times (1_{\rightarrow 1} \ 1_{\rightarrow 2} \ 1_{\rightarrow 3})$$

$$(3.1 \ 2.1 \ 1.2) \times (2.1 \ 1.2 \ 1.3) \rightarrow (1_{\leftarrow 3} \ 1_{\leftarrow 2} \ 1_{\rightarrow 2}) \times (1_{\leftarrow 2} \ 1_{\rightarrow 2} \ 1_{\rightarrow 3})$$

$$(3.1 \ 2.1 \ 1.3) \times (3.1 \ 1.2 \ 1.3) \rightarrow (1_{\leftarrow 3} \ 1_{\leftarrow 2} \ 1_{\rightarrow 3}) \times (3_{\rightarrow 1} \ 1_{\rightarrow 2} \ 1_{\rightarrow 3})$$

$$(3.1 \ 2.2 \ 1.2) \times (2.1 \ 2.2 \ 1.3) \rightarrow (1_{\leftarrow 3} \ 2_{\rightarrow 2} \ 1_{\rightarrow 2}) \times (1_{\leftarrow 2} \ 2_{\rightarrow 2} \ 1_{\rightarrow 3})$$

$$(3.1 \ 2.2 \ 1.3) \times (3.1 \ 2.2 \ 1.3) \rightarrow (1_{\leftarrow 3} \ 2_{\rightarrow 2} \ 1_{\rightarrow 3}) \times (1_{\leftarrow 3} \ 2_{\rightarrow 2} \ 1_{\rightarrow 3})$$

$$(3.1 \ 2.3 \ 1.3) \times (3.1 \ 3.2 \ 1.3) \rightarrow (1_{\leftarrow 3} \ 2_{\rightarrow 3} \ 1_{\rightarrow 3}) \times (1_{\leftarrow 3} \ 2_{\leftarrow 3} \ 1_{\rightarrow 3})$$

$$(3.2 \ 2.2 \ 1.2) \times (2.1 \ 2.2 \ 2.3) \rightarrow (2_{\leftarrow 3} \ 2_{\rightarrow 2} \ 1_{\rightarrow 2}) \times (1_{\leftarrow 2} \ 2_{\rightarrow 2} \ 2_{\rightarrow 3})$$

$$(3.2 \ 2.2 \ 1.3) \times (3.1 \ 2.2 \ 2.3) \rightarrow (2_{\leftarrow 3} \ 2_{\rightarrow 2} \ 1_{\rightarrow 3}) \times (1_{\leftarrow 3} \ 2_{\rightarrow 2} \ 2_{\rightarrow 3})$$

$$(3.2 \ 2.3 \ 1.3) \times (3.1 \ 3.2 \ 2.3) \rightarrow (2_{\leftarrow 3} \ 2_{\rightarrow 3} \ 1_{\rightarrow 3}) \times (1_{\leftarrow 3} \ 2_{\leftarrow 3} \ 2_{\rightarrow 3})$$

$$(3.3 \ 2.3 \ 1.3) \times (3.1 \ 3.2 \ 3.3) \rightarrow (3_{\rightarrow 3} \ 2_{\rightarrow 3} \ 1_{\rightarrow 3}) \times (1_{\leftarrow 3} \ 2_{\leftarrow 3} \ 3_{\rightarrow 3})$$

3. Da jede triadische Zeichenklasse bzw. Realitätsthematik  $3! = 6$  Permutationen besitzt, kann man das ganze zeichen- und realitätstheoretische semiotische Permutationssystem in Form des folgenden allgemeinen Schemas von Transformationsmatrizen darstellen:

$$\begin{pmatrix} (3 \rightarrow_a 2 \rightarrow_b 1 \rightarrow_c) \\ (3 \rightarrow_a 2 \rightarrow_b 1 \rightarrow_c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (3 \rightarrow_a 2 \rightarrow_b 1 \rightarrow_c) \\ (3 \rightarrow_a 1 \rightarrow_c 2 \rightarrow_b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (3 \rightarrow_a 2 \rightarrow_b 1 \rightarrow_c) \\ (2 \rightarrow_b 3 \rightarrow_a 1 \rightarrow_c) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (3 \rightarrow_a 2 \rightarrow_b 1 \rightarrow_c) \\ (2 \rightarrow_b 1 \rightarrow_c 3 \rightarrow_a) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (3 \rightarrow_a 2 \rightarrow_b 1 \rightarrow_c) \\ (1 \rightarrow_c 3 \rightarrow_a 2 \rightarrow_b) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (3 \rightarrow_a 2 \rightarrow_b 1 \rightarrow_c) \\ (1 \rightarrow_c 2 \rightarrow_b 3 \rightarrow_a) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (c \rightarrow_1 b \rightarrow_2 a \rightarrow_3) \\ (c \rightarrow_1 b \rightarrow_2 a \rightarrow_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (c \rightarrow_1 b \rightarrow_2 a \rightarrow_3) \\ (b \rightarrow_2 c \rightarrow_1 a \rightarrow_3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (c \rightarrow_1 b \rightarrow_2 a \rightarrow_3) \\ (c \rightarrow_1 a \rightarrow_3 b \rightarrow_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (c \rightarrow_1 b \rightarrow_2 a \rightarrow_3) \\ (a \rightarrow_3 c \rightarrow_1 b \rightarrow_2) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (c \rightarrow_1 b \rightarrow_2 a \rightarrow_3) \\ (b \rightarrow_2 a \rightarrow_3 c \rightarrow_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (c \rightarrow_1 b \rightarrow_2 a \rightarrow_3) \\ (a \rightarrow_3 b \rightarrow_2 c \rightarrow_1) \end{pmatrix}$$

## Bibliographie

Toth, Alfred, Semiotische und physikalische Gesetze und deren Durchbrechung.  
In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009

## 21. Gerichtete semiotische Objekte

1. Der Begriff des „gerichteten Objektes“ (vgl. Toth 2009), der natürlich im Rahmen relationaler Gebilde, welche durch Graphen darstellbar sind, sinnvoll ist, geht auf den Begriff des gerichteten architektonischen Raums zurück (Joedicke 1985, S. 84 ff.) und gründet in den Untersuchungen zur „Stadtkrone“ von Bruno Taut (Taut 1919).

2. Unter einem ungerichteten semiotischen Objekt wird die Objektrelation

$$OR = (M.a, \Omega.b, \mathcal{J}.c)$$

verstanden, während ein gerichtetes semiotisches Objekt definiert ist als

$$OR_{\rightarrow} = (M_{\rightarrow a}, \Omega_{\rightarrow b}, \mathcal{J}_{\rightarrow c}).$$

Entsprechend wird eine ungerichtete Zeichenklasse durch

$$ZR = (3.a \ 2.b \ 1.c)$$

und eine gerichtete durch

$$ZR = (3_{\rightarrow a} \ 2_{\rightarrow b} \ 1_{\rightarrow c})$$

definiert.

3. Da jedes Subzeichen der allgemeinen Form

$$Sz = (a.b)$$

durch folgende 4 gerichteten Objekte definierbar ist

$$(a_{\rightarrow b}), (a_{\leftarrow b}), (b_{\rightarrow a}), (b_{\leftarrow a}),$$

wobei die beiden Objekte mit Domäne  $D = b$  die dualen zu den beiden Objekten mit Domäne  $D = a$  sind, und da jede Zeichenklasse bzw. Objektklasse der allgemeinen Form

$$(3.a \ 2.b \ 1.c)$$

die folgenden 12 Permutationen besitzt

$$(3.a \ 2.b \ 1.c) \quad \times(3.a \ 2.b \ 1.c) = (c.1 \ b.2 \ a.3)$$

$$(3.a \ 1.c \ 2.b) \quad \times(3.a \ 1.c \ 2.b) = (b.2 \ c.1 \ a.3)$$

$$(2.b \ 3.a \ 1.c) \quad \times(2.b \ 3.a \ 1.c) = (c.1 \ a.3 \ b.2)$$

$$(2.b \ 1.c \ 3.a) \quad \times(2.b \ 1.c \ 3.a) = (a.3 \ c.1 \ b.2)$$

$$(1.c \ 3.a \ 2.b) \quad \times(1.c \ 3.a \ 2.b) = (b.2 \ a.3 \ c.1)$$

$$(1.c \ 2.b \ 3.a) \quad \times(1.c \ 2.b \ 3.a) = (a.3 \ b.2 \ c.1),$$

ergeben sich also 6 mal 8 = 48 gerichtete Objekte für jede der 10 Zeichenklassen bzw. der 27 Objektklassen.

$(3 \rightarrow_a 2 \rightarrow_b 1 \rightarrow_c)$	$(3 \rightarrow_a 1 \rightarrow_b 2 \rightarrow_c)$	$(2 \rightarrow_a 3 \rightarrow_b 1 \rightarrow_c)$
$(3 \rightarrow_a 2 \rightarrow_b 1 \leftarrow_c)$	$(3 \rightarrow_a 1 \rightarrow_b 2 \leftarrow_c)$	$(2 \rightarrow_a 3 \rightarrow_b 1 \leftarrow_c)$
$(3 \rightarrow_a 2 \leftarrow_b 1 \leftarrow_c)$	$(3 \rightarrow_a 1 \leftarrow_b 2 \leftarrow_c)$	$(2 \rightarrow_a 3 \leftarrow_b 1 \leftarrow_c)$
$(3 \leftarrow_a 2 \leftarrow_b 1 \leftarrow_c)$	$(3 \leftarrow_a 1 \leftarrow_b 2 \leftarrow_c)$	$(2 \leftarrow_a 3 \leftarrow_b 1 \leftarrow_c)$
$(3 \rightarrow_a 2 \leftarrow_b 1 \leftarrow_c)$	$(3 \rightarrow_a 1 \leftarrow_b 2 \leftarrow_c)$	$(2 \rightarrow_a 3 \leftarrow_b 1 \leftarrow_c)$
$(3 \leftarrow_a 2 \leftarrow_b 1 \rightarrow_c)$	$(3 \leftarrow_a 1 \leftarrow_b 2 \rightarrow_c)$	$(2 \leftarrow_a 3 \leftarrow_b 1 \rightarrow_c)$
$(3 \leftarrow_a 2 \rightarrow_b 1 \leftarrow_c)$	$(3 \leftarrow_a 1 \rightarrow_b 2 \leftarrow_c)$	$(2 \leftarrow_a 3 \rightarrow_b 1 \leftarrow_c)$
$(3 \leftarrow_a 2 \leftarrow_b 1 \leftarrow_c)$	$(3 \leftarrow_a 1 \leftarrow_b 2 \leftarrow_c)$	$(2 \leftarrow_a 3 \leftarrow_b 1 \leftarrow_c)$

$(2 \rightarrow_a 1 \rightarrow_b 3 \rightarrow_c)$	$(1 \rightarrow_a 3 \rightarrow_b 2 \rightarrow_c)$	$(1 \rightarrow_a 2 \rightarrow_b 3 \rightarrow_c)$
$(2 \rightarrow_a 1 \rightarrow_b 3 \leftarrow_c)$	$(1 \rightarrow_a 3 \rightarrow_b 2 \leftarrow_c)$	$(1 \rightarrow_a 2 \rightarrow_b 3 \leftarrow_c)$
$(2 \rightarrow_a 1 \leftarrow_b 3 \leftarrow_c)$	$(1 \rightarrow_a 3 \leftarrow_b 2 \leftarrow_c)$	$(1 \rightarrow_a 2 \leftarrow_b 3 \leftarrow_c)$
$(2 \leftarrow_a 1 \leftarrow_b 3 \leftarrow_c)$	$(1 \leftarrow_a 3 \leftarrow_b 2 \leftarrow_c)$	$(1 \leftarrow_a 2 \leftarrow_b 3 \leftarrow_c)$
$(2 \rightarrow_a 1 \leftarrow_b 3 \leftarrow_c)$	$(1 \rightarrow_a 3 \leftarrow_b 2 \leftarrow_c)$	$(1 \rightarrow_a 2 \leftarrow_b 3 \leftarrow_c)$
$(2 \leftarrow_a 1 \leftarrow_b 3 \rightarrow_c)$	$(1 \leftarrow_a 3 \leftarrow_b 2 \rightarrow_c)$	$(1 \leftarrow_a 2 \leftarrow_b 3 \rightarrow_c)$
$(2 \leftarrow_a 1 \rightarrow_b 3 \leftarrow_c)$	$(1 \leftarrow_a 3 \rightarrow_b 2 \leftarrow_c)$	$(1 \leftarrow_a 2 \rightarrow_b 3 \leftarrow_c)$
$(2 \leftarrow_a 1 \leftarrow_b 3 \leftarrow_c)$	$(1 \leftarrow_a 3 \leftarrow_b 2 \leftarrow_c)$	$(1 \leftarrow_a 2 \leftarrow_b 3 \leftarrow_c)$

## Bibliographie

Joedicke, Jürgen, Raum und Form in der Architektur. Stuttgart 1985

Taut, Bruno, Die Stadtkrone. Jena 1919

Toth, Alfred, Gerichtete Objekte. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, <http://www.mathematical-semiotics.com/pdf/Gerichtete%20Objekte.pdf> (2009)

## 22. Zeichen und Spuren

1. Ein Zeichen ist nach Bense (1967, S. 9) ein „Meta-Objekt“, d.h. ein Etwas, das ein Objekt substituiert und dadurch repräsentiert. Nach Bense wird jedes Zeichen formal durch eine Zeichenklasse erfassbar, eine Isomorphieklasse über drei Relationen, welche formal durch drei „Subzeichen“ ausgedrückt werden, von denen jedes eine eindeutige Thematisation besitzt, und zwar im Mittelbezug entweder (1.1), (1.2) oder (1.3), im Objektbezug entweder (2.1), (2.2) oder (2.3), und im Interpretantenbezug entweder (3.1), (3.2) oder (3.3). Durch die Eindeutigkeit der gewählten, bestimmten oder vorbestimmten Subzeichen ergibt sich jeweils kein Zweifel an der Repräsentationsfunktion einer Zeichenklasse in allen drei Zeichenbezügen, d.h. es handelt sich in jedem Falle um scharfe und nicht um unscharfe (fuzzy) Mengen bzw. Relationen. Noch anders ausgedrückt: Z.B. sind der iconische (2.1), der indexikalische (2.2) und der symbolische (2.3) Objektbezug diskrete Subklassen der Zeichenklassen, d.h. jedes Zeichen, das Element einer Zeichenklasse ist, gehört einem und nur einem Objektbezug an; dasselbe gilt praemissis praemittendis für den Mittel- und den Interpretantenbezug.

2. Wenn wir die Vorstellung einer diskreten relationalen Menge, genauer: einer Unterklasse einer Zeichenklasse, für die Subzeichen aufheben „fuzzifizieren“ wir



sie in einem gewissen Sinne, insofern dann ein Zeichen innerhalb einer Zeichenklasse z.B. gleichzeitig mehreren Objektbezügen angehören kann, oder insofern einfach z.B. die Frage nach der Objektrelation eines Zeichens schwebend gehalten werden kann. Formal können wir dies tun, indem wir die statisch-dynamische Konzeption eines Subzeichens durch die dynamisch-statische Konzeption seiner Spur ersetzen. Eine Spur ist eine Möglichkeit eines Zeichens oder Subzeichens, d.h. die Möglichkeit eines Mittel-, Objekt- und Interpretantenbezugs. Daher ist die Thematisation einer Spur im Gegensatz zu der eines Zeichens nie eindeutig, sondern hält stets eine vierfache Möglichkeit bereit. Es sei

$$Sz = (a.b)$$

ein Subzeichen. Dann kann seine Spur in den folgenden 4 allgemeinen Formen notiert werden:

$$(a \rightarrow b), (a \leftarrow b), (b \rightarrow a), (b \leftarrow a),$$

wobei die beiden letzteren die zu den beiden ersten dualen Spuren sind. Eine vollständige Übersicht über die Spuren und ihre Dualen liefern die Spurenmatrix und ihre Transponierte. Die je drei Nullzeichen, durch welche die Peircesche Zeichenrelation in eine tetradisch-trichotomische Relation transformierbar ist, wurden hier blockartig abgetrennt:

$$\left( \begin{array}{c|ccc} \emptyset \rightarrow 1 & 1 \rightarrow 1 & 1 \rightarrow 2 & 1 \rightarrow 3 \\ \emptyset \rightarrow 2 & 1 \leftarrow 2 & 2 \rightarrow 2 & 2 \rightarrow 3 \\ \emptyset \rightarrow 3 & 1 \leftarrow 3 & 2 \leftarrow 3 & 3 \rightarrow 3 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc} 1 \rightarrow \emptyset & 2 \rightarrow \emptyset & 3 \rightarrow \emptyset \\ \hline 1 \rightarrow 1 & 1 \leftarrow 2 & 1 \leftarrow 3 \\ 1 \rightarrow 2 & 2 \rightarrow 2 & 2 \leftarrow 3 \\ 1 \rightarrow 3 & 2 \rightarrow 3 & 3 \rightarrow 3 \end{array} \right)$$

3. Das System der Zeichenklassen und Realitätsthematiken lässt sich auf der Basis der Spurenmatrix als System von Zeichenspuren und Realitätsspuren konstruieren:

$$\begin{aligned}
(3.1\ 2.1\ 1.1) \times (1.1\ 1.2\ 1.3) &\rightarrow (1_{\leftarrow 3}\ 1_{\leftarrow 2}\ 1_{\rightarrow 1}) \times (1_{\rightarrow 1}\ 1_{\rightarrow 2}\ 1_{\rightarrow 3}) \\
(3.1\ 2.1\ 1.2) \times (2.1\ 1.2\ 1.3) &\rightarrow (1_{\leftarrow 3}\ 1_{\leftarrow 2}\ 1_{\rightarrow 2}) \times (1_{\leftarrow 2}\ 1_{\rightarrow 2}\ 1_{\rightarrow 3}) \\
(3.1\ 2.1\ 1.3) \times (3.1\ 1.2\ 1.3) &\rightarrow (1_{\leftarrow 3}\ 1_{\leftarrow 2}\ 1_{\rightarrow 3}) \times (3_{\rightarrow 1}\ 1_{\rightarrow 2}\ 1_{\rightarrow 3}) \\
(3.1\ 2.2\ 1.2) \times (2.1\ 2.2\ 1.3) &\rightarrow (1_{\leftarrow 3}\ 2_{\rightarrow 2}\ 1_{\rightarrow 2}) \times (1_{\leftarrow 2}\ 2_{\rightarrow 2}\ 1_{\rightarrow 3}) \\
(3.1\ 2.2\ 1.3) \times (3.1\ 2.2\ 1.3) &\rightarrow (1_{\leftarrow 3}\ 2_{\rightarrow 2}\ 1_{\rightarrow 3}) \times (1_{\leftarrow 3}\ 2_{\rightarrow 2}\ 1_{\rightarrow 3}) \\
(3.1\ 2.3\ 1.3) \times (3.1\ 3.2\ 1.3) &\rightarrow (1_{\leftarrow 3}\ 2_{\rightarrow 3}\ 1_{\rightarrow 3}) \times (1_{\leftarrow 3}\ 2_{\leftarrow 3}\ 1_{\rightarrow 3}) \\
(3.2\ 2.2\ 1.2) \times (2.1\ 2.2\ 2.3) &\rightarrow (2_{\leftarrow 3}\ 2_{\rightarrow 2}\ 1_{\rightarrow 2}) \times (1_{\leftarrow 2}\ 2_{\rightarrow 2}\ 2_{\rightarrow 3}) \\
(3.2\ 2.2\ 1.3) \times (3.1\ 2.2\ 2.3) &\rightarrow (2_{\leftarrow 3}\ 2_{\rightarrow 2}\ 1_{\rightarrow 3}) \times (1_{\leftarrow 3}\ 2_{\rightarrow 2}\ 2_{\rightarrow 3}) \\
(3.2\ 2.3\ 1.3) \times (3.1\ 3.2\ 2.3) &\rightarrow (2_{\leftarrow 3}\ 2_{\rightarrow 3}\ 1_{\rightarrow 3}) \times (1_{\leftarrow 3}\ 2_{\leftarrow 3}\ 2_{\rightarrow 3}) \\
(3.3\ 2.3\ 1.3) \times (3.1\ 3.2\ 3.3) &\rightarrow (3_{\rightarrow 3}\ 2_{\rightarrow 3}\ 1_{\rightarrow 3}) \times (1_{\leftarrow 3}\ 2_{\leftarrow 3}\ 3_{\rightarrow 3})
\end{aligned}$$

Wie man erkennt, bleiben in der semiotischen Spuretheorie fundamentale Ergebnisse der Theoretischen Semiotik wie etwa die Eigenrealität der Zeichen  $(1_{\leftarrow 3}\ 2_{\rightarrow 2}\ 1_{\rightarrow 3}) \times (1_{\leftarrow 3}\ 2_{\rightarrow 2}\ 1_{\rightarrow 3})$  oder die „technische Realität“ der Genuinen Kategorien  $(3_{\rightarrow 3}\ 2_{\rightarrow 3}\ 1_{\rightarrow 3}) \times (1_{\leftarrow 3}\ 2_{\leftarrow 3}\ 3_{\rightarrow 3})$  erhalten (vgl. Bense 1992).

4. Wenn man von Spuren anstatt von diskreten Subzeichen ausgeht, ergibt sich die Notwendigkeit, das Nullzeichen zu benutzen, das allerdings auch ausserhalb des Kontextes der Spuretheorie ganz zwanglos ergibt, wenn man aus der Menge des Peirceschen Zeichens

$$ZR = \{M, O, I\}$$

die Potenzmenge bildet

$$\wp ZR = \{\{M\}, \{O\}, \{I\}, \{M, O\}, \{M, I\}, \{O, I\}, \{M, O, I\}, \emptyset\}.$$

Sobald man einen Zeichenbezug fuzzyfiziert, ergibt sich ein (offenes oder geschlossenes) Intervall zwischen dem Nicht-Zustandekommen ( $\emptyset$ ) und dem

Zustandekommen (ZR) des Zeichenbezugs bzw. Subzeichenbezugs. Anstatt aber das Zeichen von Anfang an als eine unscharfe Menge einzuführen, ist es wegen des auch in der Spur als „Redukt“ des Subzeichens noch erhaltenen Doppelcharakters des Zeichens zweckdienlicher, dieses wie bisher seit Peirce zu definieren, dabei aber von der Potenzmenge auszugehen. Während die Subzeichen, wie gesagt, zugleich statische „Momente“ und dynamische „Semiosen“ sind (vgl. Bense 1975, S. 92), d.h. sowohl „Objekte“ als auch „Abbildungen“, handelt die von Bense eingeführte semiotische Kategorietheorie primär mit Abbildungen und sekundär mit Objekten. Die von mir eingeführte Spuretheorie dagegen handelt sozusagen primär mit Objekten und sekundär mit Abbildungen. Etwas intuitiver könnte man sagen: Eine semiotische Spur ist ein Objekt mit „Abbildungsstummel“, also ein „gerichtetes Objekt“.

5. Da man jedes Subzeichen als vierfaches gerichtetes Objekt, d.h. vierfache Spur schreiben kann, gilt dies natürlich auch für das Nullzeichen, das ja ebenfalls in seiner dualen Form auftritt, wie man anhand der obigen Transponierten der Spurenmatrix sehen kann. Da das Nullzeichen Teil jedes Zeichens ist, ergeben sich damit aber nicht nur 4, sondern 8 gerichtete Objekte pro Subzeichen. Wenn wir  $Sz = (a.b) = (3.1)$  setzen, haben wir z.B.

$$\begin{array}{cc|cc}
 3 \rightarrow 1 & 1 \rightarrow 3 & \emptyset \rightarrow 1 & 1 \rightarrow \emptyset \\
 3 \leftarrow 1 & 1 \leftarrow 3 & \emptyset \leftarrow 1 & 1 \leftarrow \emptyset
 \end{array}$$

Bei den 4 Spuren links vom dicken Trennstrich sind sowohl Domänen als auch Codomänen  $\neq \emptyset$ . Auf der rechten Seite stehen links vom dünnen Trennstrich die beiden Fälle mit  $D = \emptyset, C \neq \emptyset$ , und rechts vom dünnen Trennstrich die beiden Fälle von  $D \neq \emptyset, C = \emptyset$ .

6. Allerdings ergibt sich folgendes Problem: Trotz ihrer gleichen Struktur mit den Fällen, wo  $D \neq \emptyset, C \neq \emptyset$ , sind von den vier Fällen

$$\emptyset_{\rightarrow 1} \quad 1_{\rightarrow \emptyset}$$

$$\emptyset_{\leftarrow 1} \quad 1_{\leftarrow \emptyset}$$

die beiden zur Rechten semiotisch unterspezifiziert, denn nach der Spurenmatrix und ihrer Transponierten tritt ja das nicht-duale ebenso wie das duale Nullzeichen jeweils in dreifacher Gestalt auf. D.h., man würde, etwas entsprechend zu einem Term wie  $3_{\rightarrow 1}$ , Nullzeichen-Terme der folgenden Gestalt erwarten

$$1_{\rightarrow \emptyset} \rightarrow \{(1_{\rightarrow \emptyset 1}), (1_{\rightarrow \emptyset 2}), (1_{\rightarrow \emptyset 3})\}$$

$$2_{\rightarrow \emptyset} \rightarrow \{(2_{\rightarrow \emptyset 1}), (2_{\rightarrow \emptyset 2}), (2_{\rightarrow \emptyset 3})\}$$

$$3_{\rightarrow \emptyset} \rightarrow \{(3_{\rightarrow \emptyset 1}), (3_{\rightarrow \emptyset 2}), (3_{\rightarrow \emptyset 3})\}.$$

Das sind allerdings die in Toth (2009) eingeführten Bi-Spuren, also Spuren, deren Codomänen selbst Spuren sind, denn es ist ja

$$\{(a_{\rightarrow \emptyset 1}), (b_{\rightarrow \emptyset 2}), (c_{\rightarrow \emptyset 3})\} = \{(a_{\rightarrow \emptyset \rightarrow 1}), (b_{\rightarrow \emptyset \rightarrow 2}), (c_{\rightarrow \emptyset \rightarrow 3})\}.$$

Damit haben wir allerdings die Möglichkeit (bzw. die Pflicht?), auch die entsprechenden nicht-dualen Fälle zu spezifizieren:

$$\times\{(1_{\rightarrow \emptyset 1}), (1_{\rightarrow \emptyset 2}), (1_{\rightarrow \emptyset 3})\} = \{(\emptyset_{1 \rightarrow 1}), (\emptyset_{2 \rightarrow 1}), (\emptyset_{3 \rightarrow 1})\}$$

$$\times\{(2_{\rightarrow \emptyset 1}), (2_{\rightarrow \emptyset 2}), (2_{\rightarrow \emptyset 3})\} = \{(\emptyset_{1 \rightarrow 2}), (\emptyset_{2 \rightarrow 2}), (\emptyset_{3 \rightarrow 2})\}$$

$$\times\{(3_{\rightarrow \emptyset 1}), (3_{\rightarrow \emptyset 2}), (3_{\rightarrow \emptyset 3})\} = \{(\emptyset_{1 \rightarrow 3}), (\emptyset_{2 \rightarrow 3}), (\emptyset_{3 \rightarrow 3})\}.$$

7. Man kann sich damit fragen, ob es nicht sinnvoll ist, von Anfang an die spuren-theoretische Semiotik auf Bi-Spuren anstatt auf einfachen Spuren zu begründen. In diesem Fall würden also die einzelnen Subzeichen und ihre (einzelnen) Kategorien bzw. Morphismen Bi-Spuren gegenüberstehen, man hätte also einen ähnlichen Fall wie seinerzeit in der reinen Mathematik, als Bénabou die Bi-Kategorien einführte (Bénabou 1967). Das Problem liegt aber darin, dass man dann für alle Spuren, bei denen entweder  $D \neq \emptyset$  oder/und  $C \neq \emptyset$ , Terme bekäme wie den folgenden

$1_{1 \rightarrow 2}$ ,

was also einer doppelten Abbildung

$$(1 \rightarrow 1) \circ (1 \rightarrow 2) = (1 \rightarrow 2)$$

über je eine gemeinsame („homogene“) C/D entspräche. Das ist nun allerdings möglich, denn man kann alle Subzeichen (a.b) auf diese Weise analysieren:

$$(1 \rightarrow 1) \circ (1 \rightarrow 1) = (1 \rightarrow 1)$$

$$(1 \rightarrow 2) \circ (2 \rightarrow 2) = (1 \rightarrow 2)$$

$$(1 \rightarrow 3) \circ (3 \rightarrow 3) = (1 \rightarrow 3)$$

$$(2 \rightarrow 1) \circ (1 \rightarrow 1) = (2 \rightarrow 1)$$

$$(2 \rightarrow 2) \circ (2 \rightarrow 2) = (2 \rightarrow 2)$$

$$(2 \rightarrow 3) \circ (3 \rightarrow 3) = (2 \rightarrow 3)$$

$$(3 \rightarrow 1) \circ (1 \rightarrow 1) = (3 \rightarrow 1)$$

$$(3 \rightarrow 2) \circ (2 \rightarrow 2) = (3 \rightarrow 2)$$

$$(3 \rightarrow 3) \circ (3 \rightarrow 3) = (3 \rightarrow 3),$$

indem man sie entsprechend ihrer Codomäne  $C = b$  mit dem entsprechenden identitiven Morphismus (b.b) ( $b \in \{1, 2, 3\}$ ) multipliziert. Weitere Untersuchungen sind dringend nötig.

### **Bibliographie**

Bénabou, Jean, Introduction to bicategories, part I. In: Reports of the Midwest Category Seminar, Lecture Notes in Mathematics 47, 1967, S. 1-77

Bense, Max, Semiotik. Baden-Baden 1967

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992

Toth, Alfred, Bi-Spuren und dreidimensionale Primzeichen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009

### 23. Eine einheitliche Begründung der Semiotik auf der Basis von Bi-Spuren

1. Unter einer Spurenklasse verstehen wir eine Zeichenklasse, deren drei (monadische, dyadische und triadische) Bezüge referentiell „unscharf“ sind. Wenn wir für referentielle Unschärfe das Zeichen „ $\langle$ “ einführen, können wir definieren:

$$\text{Skl} = ((3.a)\langle (2.b)\langle (1.c)\langle),$$

wobei ein Ausdruck wie  $(a.b)\langle$  gleichbedeutend ist mit  $a.\langle$  und  $.b\langle$ , d.h. die Unschärfe kann sich auf die triadischen ebenso wie auf die trichotomischen Bezüge beziehen. Für die Subzeichen gilt dann

$$(3.a) = \{\{3.1\}\langle, \{3.2\}\langle, \{3.3\}\langle\}$$

$$(2.b) = \{\{2.1\}\langle, \{2.2\}\langle, \{2.3\}\langle\}$$

$$(1.c) = \{\{1.1\}\langle, \{1.2\}\langle, \{1.3\}\langle\},$$

d.h. wir können präziser definieren

$$\text{Skl} = \{\{3.a\}, \{2.b\}, \{1.c\}\}.$$

Damit sind allerdings die Bedingungen für eine Potenzmenge für

$$\text{PZ} = \{1, 2, 3\} \text{ (vgl. Bense 1980)}$$

erfüllt, d.h. wir bekommen

$$\wp\text{PZ} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}, \emptyset\}.$$

Und hieraus ergibt sich

$$(\emptyset.d) = \{\{\emptyset.1\}\leftarrow, \{\emptyset.2\}\leftarrow, \{\emptyset.3\}\leftarrow\},$$

weshalb wir erneut redefinieren müssen

$$\text{SkI} = \{\{\{3.a\}\leftarrow \{2.b\}\leftarrow \{1.c\}\leftarrow, \{\emptyset.d\}\leftarrow\}.$$

2. Man kann somit als Basis zur Konstruktion von Spurenklassen sowie ihren dualen Spurenthematiken die folgende Spurenmatrix sowie ihre Transponierte benutzen:

$$\left( \begin{array}{c|ccc} \emptyset_{\rightarrow 1} & 1_{\rightarrow 1} & 1_{\rightarrow 2} & 1_{\rightarrow 3} \\ \emptyset_{\rightarrow 2} & 1_{\leftarrow 2} & 2_{\rightarrow 2} & 2_{\rightarrow 3} \\ \emptyset_{\rightarrow 3} & 1_{\leftarrow 3} & 2_{\leftarrow 3} & 3_{\rightarrow 3} \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc} 1_{\rightarrow \emptyset} & 2_{\rightarrow \emptyset} & 3_{\rightarrow \emptyset} \\ \hline 1_{\rightarrow 1} & 1_{\leftarrow 2} & 1_{\leftarrow 3} \\ 1_{\rightarrow 2} & 2_{\rightarrow 2} & 2_{\leftarrow 3} \\ 1_{\rightarrow 3} & 2_{\rightarrow 3} & 3_{\rightarrow 3} \end{array} \right)$$

Nun sind aber die beiden möglichen Fälle

$$\emptyset_{\rightarrow 1}$$

$$\emptyset_{\leftarrow 1}$$

ambig, denn sie haben zwei Interpretationen:

1. Ein unspezifiziertes Nullzeichen  $\emptyset$  wird auf  $1 \equiv M$  abgebildet.
2.  $\emptyset_{\rightarrow 1} \rightarrow (\emptyset.1)$ .

Ähnlich liegen die Fälle bei den Dualen:

$$1_{\rightarrow \emptyset}$$

$$1_{\leftarrow \emptyset},$$

denn hier hat man die Wahl zwischen

1. Ein  $1 \equiv M$  wird auf ein un spezifiziertes Nullzeichen  $\emptyset$  abgebildet.

2.  $1_{\rightarrow\emptyset} \rightarrow (1.\emptyset)$ .

Zur Beseitigung der Ambiguitäten bei Nullzeichen (d.h. Zeichen, bei denen entweder  $D = \emptyset$  oder  $C = \emptyset$  oder beide  $= \emptyset$  sind) kann man nun festsetzen (vgl. Toth 2009a):

$1_{\rightarrow\emptyset} \rightarrow \{(1_{\rightarrow\emptyset 1}), (1_{\rightarrow\emptyset 2}), (1_{\rightarrow\emptyset 3})\}$

$2_{\rightarrow\emptyset} \rightarrow \{(2_{\rightarrow\emptyset 1}), (2_{\rightarrow\emptyset 2}), (2_{\rightarrow\emptyset 3})\}$

$3_{\rightarrow\emptyset} \rightarrow \{(3_{\rightarrow\emptyset 1}), (3_{\rightarrow\emptyset 2}), (3_{\rightarrow\emptyset 3})\}$ .

mit

$\{(a_{\rightarrow\emptyset 1}), (b_{\rightarrow\emptyset 2}), (c_{\rightarrow\emptyset 3})\} = \{(a_{\rightarrow\emptyset\rightarrow 1}), (b_{\rightarrow\emptyset\rightarrow 2}), (c_{\rightarrow\emptyset\rightarrow 3})\}$ .

sowie für die Dualen

$\times\{(1_{\rightarrow\emptyset 1}), (1_{\rightarrow\emptyset 2}), (1_{\rightarrow\emptyset 3})\} = \{(\emptyset_{1\rightarrow 1}), (\emptyset_{2\rightarrow 1}), (\emptyset_{3\rightarrow 1})\}$

$\times\{(2_{\rightarrow\emptyset 1}), (2_{\rightarrow\emptyset 2}), (2_{\rightarrow\emptyset 3})\} = \{(\emptyset_{1\rightarrow 2}), (\emptyset_{2\rightarrow 2}), (\emptyset_{3\rightarrow 2})\}$

$\times\{(3_{\rightarrow\emptyset 1}), (3_{\rightarrow\emptyset 2}), (3_{\rightarrow\emptyset 3})\} = \{(\emptyset_{1\rightarrow 3}), (\emptyset_{2\rightarrow 3}), (\emptyset_{3\rightarrow 3})\}$ .

mit  $\{(\emptyset_{1\rightarrow 3}), (\emptyset_{2\rightarrow 3}), (\emptyset_{3\rightarrow 3})\} = \{(\emptyset_{\rightarrow a\rightarrow 3}), (\emptyset_{\rightarrow a\rightarrow 3}), (\emptyset_{\rightarrow a\rightarrow 3})\}$ .

3. Ausdrücke wie

$\{(a_{\rightarrow\emptyset\rightarrow 1}), (b_{\rightarrow\emptyset\rightarrow 2}), (c_{\rightarrow\emptyset\rightarrow 3})\}$

oder

$\{(\emptyset_{\rightarrow a\rightarrow 3}), (\emptyset_{\rightarrow a\rightarrow 3}), (\emptyset_{\rightarrow a\rightarrow 3})\}$

können nun nur dann als Spuren interpretiert werden, wenn es sich bei den Doppelabbildungen um homogene Kompositionen der abstrakten Gestalt



$$(a \rightarrow b) \circ (b \rightarrow c) = (a \rightarrow c)$$

handelt. Dieses Schema erlaubt uns nun aber, sämtliche Spuren und nicht nur diejenigen, bei denen entweder die Domäne, die Codomäne oder beide =  $\emptyset$  sind, als Bi-Spuren einzuführen:

$$(1 \rightarrow 1) \circ (1 \rightarrow 1) = (1 \rightarrow 1)$$

$$(1 \rightarrow 2) \circ (2 \rightarrow 2) = (1 \rightarrow 2)$$

$$(1 \rightarrow 3) \circ (3 \rightarrow 3) = (1 \rightarrow 3)$$

$$(2 \rightarrow 1) \circ (1 \rightarrow 1) = (2 \rightarrow 1)$$

$$(2 \rightarrow 2) \circ (2 \rightarrow 2) = (2 \rightarrow 2)$$

$$(2 \rightarrow 3) \circ (3 \rightarrow 3) = (2 \rightarrow 3)$$

$$(3 \rightarrow 1) \circ (1 \rightarrow 1) = (3 \rightarrow 1)$$

$$(3 \rightarrow 2) \circ (2 \rightarrow 2) = (3 \rightarrow 2)$$

$$(3 \rightarrow 3) \circ (3 \rightarrow 3) = (3 \rightarrow 3),$$

d.h. wir haben nun statt einfachen Spuren der Form

$$a_{\rightarrow c}$$

fortan solche der Form

$$a_{b \rightarrow c},$$

wozu wir die entsprechenden Bi-Spuren-Matrizen bilden können:

$$\left( \begin{array}{c|ccc} \emptyset \rightarrow 1 & 1_{1 \rightarrow 1} & 1_{1 \rightarrow 2} & 1_{1 \rightarrow 3} \\ \emptyset \rightarrow 2 & 1_{1 \leftarrow 2} & 2_{2 \rightarrow 2} & 2_{2 \rightarrow 3} \\ \emptyset \rightarrow 3 & 1_{1 \leftarrow 3} & 2_{2 \leftarrow 3} & 3_{3 \rightarrow 3} \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc} 1_{1 \rightarrow \emptyset} & 2_{2 \rightarrow \emptyset} & 3_{3 \rightarrow \emptyset} \\ \hline 1_{1 \rightarrow 1} & 1_{1 \leftarrow 2} & 1_{1 \leftarrow 3} \\ 1_{1 \rightarrow 2} & 2_{2 \rightarrow 2} & 2_{2 \leftarrow 3} \\ 1_{1 \rightarrow 3} & 2_{2 \rightarrow 3} & 3_{3 \rightarrow 3} \end{array} \right)$$

Man beachte also, dass für duale Subzeichen innerhalb der gleichen Matrizen (d.h. für die symmetrischen Paare) gilt:

$$(2.1) = (2_{1 \rightarrow 1}) = (1_{1 \leftarrow 2})$$

$$(3.1) = (3_{1 \rightarrow 1}) = (1_{1 \leftarrow 3})$$

$$(3.2) = (3_{2 \rightarrow 2}) = (2_{2 \leftarrow 3}).$$

Wenn man nun sowohl zwei- als auch drei-dimensionale Subzeichen (vgl. Toth 2009b) mit Hilfe von Bi-Spuren definiert, kann man den Unterschied auf die Homogenität bzw. Inhomogenität der entsprechenden Bi-Spuren zurückführen; vgl. z.B.

$$(1_{1 \rightarrow 2}) = (1 \rightarrow 1) \circ (1 \rightarrow 2) = (1 \rightarrow 2) = (1.2) (= \alpha) \quad [\text{homogen: 2-dim. Sz}]$$

aber

$$(1_{2 \rightarrow 3}) = (1 \rightarrow 2) \circ (2 \rightarrow 3) = (1.2.3) \quad [\text{inhomogen: 3-dim. Sz}]$$

## Bibliographie

Bense, Max, Die Einführung der Primzeichen. In: *Ars Semeiotica* III, 3 (1980), S. 287-294

Toth, Alfred, Zeichen und Spuren. In: *Electronic Journal of Mathematical Semiotics*, 2009a

Toth, Alfred, Bi-Spuren und dreidimensionale Primzeichen. In: *Electronic Journal of Mathematical Semiotics*, 2009b

## 24. Objekte als Spuren

Wie Zeichen als Spuren behandelt werden können, wurde in Toth (2009) aufgezeigt. In der Praxis sind es aber doch wohl zur Hauptsache Objekte, die Spuren hinterlassen, was man etwa in Sebeoks Traktat über Charles Sanders Peirce und Sherlock Holmes in unterhaltsamer Weise nachlesen kann (vgl. Sebeok/Umiker Sebeok 1982). Wie in der folgenden Übersicht gezeigt wird, kann man Objekte mit Hilfe der semiotischen Spuretheorie auf 4 Arten darstellen: Als spuretheoretische Objekte, als bi-spuretheoretische Objekte, als reine Spuren, und als reine Bi-Spuren. Im folgenden gilt jeweils:

$$m = \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_n\}$$

$$\Omega = \{\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3, \dots, \Omega_n\}$$

$$\mathcal{J} = \{\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2, \mathcal{J}_3, \dots, \mathcal{J}_n\}$$

$$a, b, c \in \{M, O, I\} / \{1, 2, 3\}$$

$$a, b, c \in \{M, O, I\} / \{1, 2, 3\}$$

### 1. Objekte

$$OR_{sp} = (m_{\rightarrow a}, \Omega_{\rightarrow b}, \mathcal{J}_{\rightarrow c})$$

$$Bi-OR_{sp} = (m_{a \rightarrow a}, \Omega_{b \rightarrow b}, \mathcal{J}_{c \rightarrow c})$$

$$Sp_{OR} = (\rightarrow a, \rightarrow b, \rightarrow c) \equiv (\rightarrow a \ m, \rightarrow b \ \Omega, \rightarrow c \ \mathcal{J})$$

$$Bi-Sp_{OR} = (\rightarrow a \ m, \rightarrow b \ \Omega, \rightarrow c \ \mathcal{J}) \equiv (a \rightarrow a \ m, b \rightarrow b \ \Omega, c \rightarrow c \ \mathcal{J})$$

### 2. Semiotische Objekte

#### 2.1. Zeichenobjekte

$$ZO_{sp} = (<M_{\rightarrow a}, m_{\rightarrow b}>, <O_{\rightarrow c}, \Omega_{\rightarrow d}>, <I_{\rightarrow e}, \mathcal{J}_{\rightarrow f}>)$$

$$\text{Bi-Sp}_{ZO} = (\langle M_{a \rightarrow a}, m_{b \rightarrow b} \rangle, \langle O_{c \rightarrow c}, \Omega_{d \rightarrow d} \rangle, \langle I_{e \rightarrow e}, \mathcal{J}_{f \rightarrow f} \rangle)$$

$$\text{Sp}_{ZO} = (\rightarrow a_{\langle M, m \rangle}, \rightarrow b_{\langle O, \Omega \rangle}, \rightarrow c_{\langle I, \mathcal{J} \rangle})$$

$$\text{Bi-Sp}_{ZO} = (a \rightarrow a_{\langle M, m \rangle}, b \rightarrow b_{\langle O, \Omega \rangle}, c \rightarrow c_{\langle I, \mathcal{J} \rangle})$$

## 2.2. Objektzeichen

$$\text{OZ}_{sp} = (\langle m_{\rightarrow a}, M_{\rightarrow b} \rangle, \langle \Omega_{\rightarrow c}, O_{\rightarrow d} \rangle, \langle \mathcal{J}_{\rightarrow e}, I_{\rightarrow f} \rangle) \equiv$$

$$\text{Bi-Sp}_{OZ} = (\langle m_{a \rightarrow a}, M_{ab \rightarrow b} \rangle, \langle \Omega_{c \rightarrow c}, O_{d \rightarrow d} \rangle, \langle \mathcal{J}_{e \rightarrow e}, I_{f \rightarrow f} \rangle)$$

$$\text{Sp}_{OZ} = (\rightarrow a_{\langle m, M \rangle}, \rightarrow b_{\langle O, \Omega \rangle}, \rightarrow c_{\langle \mathcal{J}, I \rangle})$$

$$\text{Bi-Sp}_{OZ} = (a \rightarrow a_{\langle m, M \rangle}, b \rightarrow b_{\langle O, \Omega \rangle}, c \rightarrow c_{\langle \mathcal{J}, I \rangle})$$

## Bibliographie

Sebeok, Thomas A./Umiker Sebeok, Jean, Du kennst meine Methode. Frankfurt am Main 1982

Toth, Alfred, Zeichen und Spuren. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009

## 25. Eigenrealität in der semiotischen Spuretheorie

1. In Toth (2009) hatten wir, ausgehend von der semiotischen Spurenmatrix und ihrer Transponierten,

$$\left( \begin{array}{c|ccc} \emptyset_{\rightarrow 1} & 1_{\rightarrow 1} & 1_{\rightarrow 2} & 1_{\rightarrow 3} \\ \emptyset_{\rightarrow 2} & 1_{\leftarrow 2} & 2_{\rightarrow 2} & 2_{\rightarrow 3} \\ \emptyset_{\rightarrow 3} & 1_{\leftarrow 3} & 2_{\leftarrow 3} & 3_{\rightarrow 3} \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc} 1_{\rightarrow \emptyset} & 2_{\rightarrow \emptyset} & 3_{\rightarrow \emptyset} \\ \hline 1_{\rightarrow 1} & 1_{\leftarrow 2} & 1_{\leftarrow 3} \\ 1_{\rightarrow 2} & 2_{\rightarrow 2} & 2_{\leftarrow 3} \\ 1_{\rightarrow 3} & 2_{\rightarrow 3} & 3_{\rightarrow 3} \end{array} \right)$$

festgestellt, dass auch bei der Reduktion der Subzeichen auf Spuren Eigenrealität sowie Kategorienrealität (von Bense 1992, S. 40 auch als „Eigenrealität schwächerer Repräsentation“ bezeichnet) erhalten bleiben.

2. In Wahrheit ist es jedoch sogar so, dass, bedingt durch die grössere Allgemeinheit von Spuren, wir ein stärker differenziertes Bild von Eigen- und Kategorienrealität bekommen, und zwar auf der Ebene der Zeichen, der Objekte sowie der semiotischen Objekte.

## 2.1. Zeichen

$$ZR_{sp} = (1_{\rightarrow 3}, 2_{\rightarrow 2}, 3_{\rightarrow 3})$$

$$Bi-ZR_{sp} = (1_3 \rightarrow 3, 2_{2 \rightarrow 2}, 3_{3 \rightarrow 3})$$

$$Sp_{ZR} = (\rightarrow 3, \rightarrow 2, \rightarrow 3) \equiv (\rightarrow 1_3, \rightarrow 2_2, \rightarrow 3_3)$$

$$Bi-Sp_{ZR} = (\rightarrow 1_3, \rightarrow 2_2, \rightarrow 3_3) \equiv (1 \rightarrow 1_3, 2 \rightarrow 2_2, 3 \rightarrow 3_3)$$

## 2.2. Objekte

$$OR_{sp} = (1_{\rightarrow 3}, 2_{\rightarrow 2}, 3_{\rightarrow 3})$$

$$Bi-OR_{sp} = (1_3 \rightarrow 3, 2_{2 \rightarrow 2}, 3_{3 \rightarrow 3})$$

$$Sp_{OR} = (\rightarrow 1, \rightarrow 2, \rightarrow 3) \equiv (\rightarrow 1_3, \rightarrow 2_2, \rightarrow 3_3)$$

$$Bi-Sp_{OR} = (\rightarrow 1_3, \rightarrow 2_2, \rightarrow 3_3) \equiv (1 \rightarrow 1_3, 2 \rightarrow 2_2, 3 \rightarrow 3_3)$$

## 2.3 Semiotische Objekte

### 2.3.1. Zeichenobjekte

$$ZO_{sp} = (\langle 1_{\rightarrow 3}, 1_{\rightarrow 3} \rangle, \langle 2_{\rightarrow 2}, 2_{\rightarrow 2} \rangle, \langle 3_{\rightarrow 3}, 3_{\rightarrow 3} \rangle) \equiv$$

$$Bi-Sp_{ZO} = (\langle 1_3 \rightarrow 3, 1_3 \rightarrow 3 \rangle, \langle 2_{2 \rightarrow 2}, 2_{2 \rightarrow 2} \rangle, \langle 3_{3 \rightarrow 3}, 3_{3 \rightarrow 3} \rangle)$$

$$Sp_{ZO} = (\rightarrow 1_{\langle 3, 3 \rangle}, \rightarrow 2_{\langle 2, 2 \rangle}, \rightarrow 3_{\langle 3, 3 \rangle})$$

$$\text{Bi-Sp}_{Z0} = (1 \rightarrow 1_{\langle 3, 3 \rangle}, 2 \rightarrow 2_{\langle 2, 2 \rangle}, 3 \rightarrow 3_{\langle 3, 3 \rangle})$$

### 2.3.2. Objektzeichen

$$\text{OZ}_{\text{sp}} = (\langle 1_{\rightarrow 3}, 1_{\rightarrow 3} \rangle, \langle 2_{\rightarrow 2}, 2_{\rightarrow 2} \rangle, \langle 3_3, 3_{\rightarrow 3} \rangle)$$

$$\text{Bi-Sp}_{\text{OZ}} = (\langle 1_{3 \rightarrow 3}, 1_{3 \rightarrow 3} \rangle, \langle 2_{2 \rightarrow 2}, 2_{2 \rightarrow 2} \rangle, \langle 3_{3 \rightarrow 3}, 3_{3 \rightarrow 3} \rangle)$$

$$\text{Sp}_{\text{OZ}} = (\rightarrow 1_{\langle 3, 3 \rangle}, \rightarrow 2_{\langle 2, 2 \rangle}, \rightarrow 3_{\langle 3, 3 \rangle})$$

$$\text{Bi-Sp}_{\text{OZ}} = (1 \rightarrow 1_{\langle 3, 3 \rangle}, 2 \rightarrow 2_{\langle 2, 2 \rangle}, 3 \rightarrow 3_{\langle 3, 3 \rangle})$$

3. Da die Kategorienrealität keine Binnensymmetrie kennt, besteht jedes der drei Paare einer triadischen Relationen aus gleichen Spuren, wobei über die Ordnung der triadischen Hauptwerte (degenerativ wie bei regulären Zeichenklassen oder nicht) keine Einigkeit besteht.

## Bibliographie

Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992

Toth, Alfred, Zeichen und Spuren. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009

## 26. Verschachtelte Spuren

1. In Toth (2008b) hatten wir die relations- und ordnungstheoretischen Voraussetzungen gegeben, welche aus der Konzeption des Zeichens als „Relation über Relation“ bzw. als „verschachtelter Relation“ folgen (Bense 1979, S: 53, S. 67):

$$\text{ZR} = (M, O, I) = ((M), (M \rightarrow O), (M \rightarrow O \rightarrow I)),$$

d.h. die triadische Zeichenrelation ist eine Relation über einer monadischen, einer dyadischen und einer triadischen Relation.

2. Wesentlich komplexer werden die Fälle allerdings, falls man von den 6 möglichen Permutationen der Peircseschen Zeichenrelation ausgeht (vgl. Toth 2008a, S. 177 ff.). Wir haben dann

$$\text{ZR1} = (\text{M}, \text{O}, \text{I}) = ((\text{M}), (\text{M} \rightarrow \text{O}), (\text{M} \rightarrow \text{O} \rightarrow \text{I}))$$

$$\text{ZR2} = (\text{M}, \text{I}, \text{O}) = ((\text{M}), (\text{M} \rightarrow \text{O} \rightarrow \text{I}), (\text{M} \rightarrow \text{O}))$$

$$\text{ZR3} = (\text{O}, \text{I}, \text{M}) = ((\text{M} \rightarrow \text{O}), (\text{M} \rightarrow \text{O} \rightarrow \text{I}), (\text{M}))$$

$$\text{ZR4} = (\text{O}, \text{M}, \text{I}) = ((\text{M} \rightarrow \text{O}), (\text{M}), (\text{M} \rightarrow \text{O} \rightarrow \text{I}))$$

$$\text{ZR5} = (\text{I}, \text{O}, \text{M}) = ((\text{M} \rightarrow \text{O} \rightarrow \text{I}), (\text{M} \rightarrow \text{O}), (\text{M}))$$

$$\text{ZR6} = (\text{I}, \text{M}, \text{O}) = ((\text{M} \rightarrow \text{O} \rightarrow \text{I}), (\text{M}), (\text{M} \rightarrow \text{O}))$$

Hier sind also pro Relation mindestens eine grössere in einer kleineren Partialrelation eingeschlossen.

3. Stellen wir die bisherigen Ergebnisse mit Hilfe der semiotischen Spuretheorie dar (vgl. Toth 2009), so haben wir als Entsprechung für ZR

$$\text{SpR} = (\emptyset \rightarrow 1. \rightarrow 2. \rightarrow 3) = (((\emptyset \rightarrow 1) \rightarrow 2.) \rightarrow 3))$$

und im Falle der 6 Permutationen:

$$\text{ZR1} = (\text{M}, \text{O}, \text{I}) = ((\emptyset \rightarrow 1), ((\emptyset \rightarrow 1) \rightarrow 2.), (((\emptyset \rightarrow 1) \rightarrow 2.) \rightarrow 3)))$$

$$\text{ZR2} = (\text{M}, \text{I}, \text{O}) = ((\emptyset \rightarrow 1), (((\emptyset \rightarrow 1) \rightarrow 2.) \rightarrow 3)), ((\emptyset \rightarrow 1) \rightarrow 2))$$

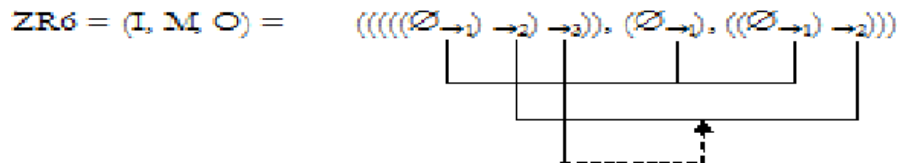
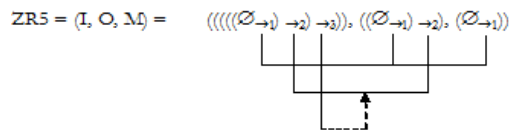
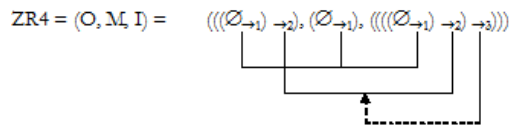
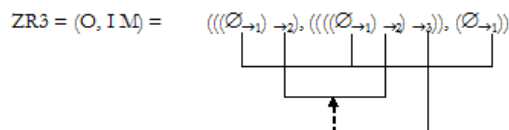
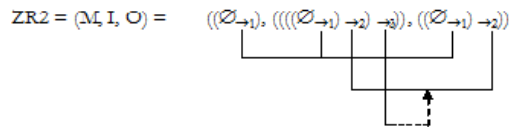
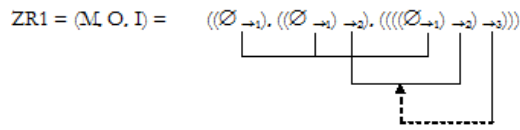
$$\text{ZR3} = (\text{O}, \text{I}, \text{M}) = (((\emptyset \rightarrow 1) \rightarrow 2), (((\emptyset \rightarrow 1) \rightarrow 2) \rightarrow 3)), (\emptyset \rightarrow 1))$$

$$\text{ZR4} = (\text{O}, \text{M}, \text{I}) = (((\emptyset \rightarrow 1) \rightarrow 2), (\emptyset \rightarrow 1), (((\emptyset \rightarrow 1) \rightarrow 2) \rightarrow 3)))$$

$$\text{ZR5} = (\text{I}, \text{O}, \text{M}) = (((((\emptyset \rightarrow 1) \rightarrow 2) \rightarrow 3)), ((\emptyset \rightarrow 1) \rightarrow 2), (\emptyset \rightarrow 1))$$

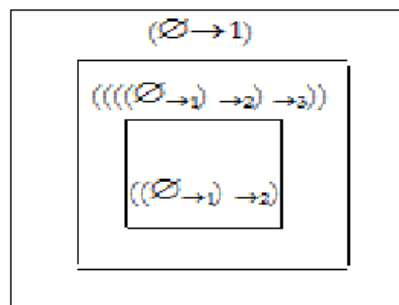
$$\text{ZR6} = (\text{I}, \text{M}, \text{O}) = ((\text{M} \rightarrow \text{O} \rightarrow \text{I}), (\emptyset \rightarrow 1), ((\emptyset \rightarrow 1) \rightarrow 2)))$$

4. Wenn wir zur Darstellung der Pseudo-Inklusionen relationale Diagramme verwenden, können wir die Fälle, wo grössere in kleineren Relationen inkludiert sind, mit den Überkreuzungen der Linien beschreiben:



Mit Hilfe von Venn-Diagrammen dargestellt, sieht also z.B.

ZR3 = (O, I, M) =  $((\emptyset \rightarrow_1), (((\emptyset \rightarrow_1) \rightarrow_2) \rightarrow_3), (\emptyset \rightarrow_1))$   
wie folgt aus:





## Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Semiotische Strukturen und Prozesse. Klagenfurt 2008 (2008a)

Toth, Alfred, Die rekursive Verschachtelung der Zeichenrelation. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2008b

Toth, Alfred, Zeichen und Spuren. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009

## 27. Die Spurenrelation als unscharfe Menge von Relationen

1. In Toth (2009) wurde die Spurenrelation als triadisch-trichotomische Menge von Spuren im Sinne von Subzeichen mit unscharfer Referenz eingeführt

$$Skl = ((3.a) \prec (2.b) \prec (1.c) \prec$$

Die Subzeichen sind demnach nicht-eindeutig als Objekte, sondern aus einem Intervall definiert, so zwar dass gilt

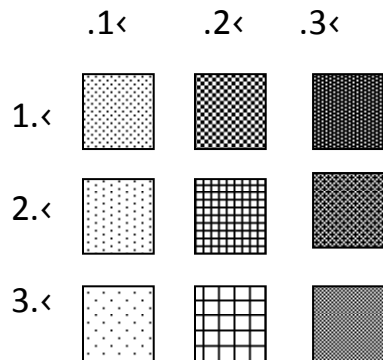
$$(3.a) = \{ \langle x.y \rangle \mid \langle x.y \rangle \in [3.1, 3.3] \}$$

$$(2.b) = \{ \langle x.y \rangle \mid \langle x.y \rangle \in [2.1, 2.3] \}$$

$$(1.c) = \{ \langle x.y \rangle \mid \langle x.y \rangle \in [1.1, 1.3] \}$$

2. Intuitiv besagt dies, dass ein Subzeichen, z.B. (2.1), entweder dieses Subzeichen selbst, d.h. (2.1), sein kann, oder aber am „Einflussfeld“ der pro Zeichenbezug jeweils beiden anderen Subzeichen partizipieren kann, allerdings ohne selbst (2.2) oder (2.3) zu werden. Man sollte also unscharfe Referenz bei Spuren nicht mit unscharfen Menge der Fuzzy-Logik verwechseln. Obwohl nun die hier mehr intuitiv geschilderten Verhältnis praktisch nicht graphisch darstellbar sind, hat es in der Theoretischen Semiotik zwei Konzepte gegeben, welche ihm nahekommen und die zur gleichen Zeit entstanden sind: Arins System „primärer, sekundärer und tertiärer Subzeichen“ (Arin 1981, S. 214 ff.) und Steffens „generatives

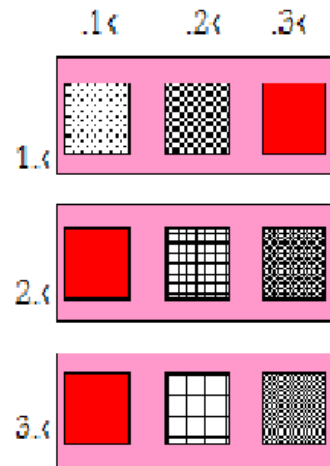
Einflussfeld“ (Steffen 1981, z.B. S. 131). Obwohl Steffen Systems, das auf der Grossen Matrix beruht, zu mehr Fixpunkten von Intervallen führt und daher für uns geeigneter wäre, wähle ich hier wegen seiner Einfachheit Arins Systems, obwohl es im Gegensatz zu demjenigen Steffens primär statisch ist. Man kann demnach die obigen drei Definitionen allgemeiner Subzeichen der drei Zeichenbezüge wie folgt graphisch darstellen:



Wenn wir nun z.B.  $a = 1$   $b = 1$  und  $c = 3$  einsetzen, können wir

(3.a)< (2.b)< (1.c)<

wie folgt mit Hilfe dieses Schemas darstellen:



wobei die Arinschen „primären“ Subzeichen die rot markierten der Spurenrelation

$$Skl = (3.1) \prec (2.1) \prec (1.c) \prec$$

sind und die jeweils „sekundären“ und „tertiären“ (welche im Rahmen unserer Intervallkonzeption allerdings nicht-unterscheidbar sind) jeweils innerhalb des rosarot ausgezeichneten „generativen Einflussfeldes“ liegen. Zieht man eine weniger farbenfrohe Darstellung vor, so kann man dieselbe Skl wie folgt darstellen:

<	<	1.3
2.1	<	<
3.1	<	<

## Bibliographie

Arin, Ertekin, Objekt- und Raumzeichen in der Architektur. Diss. Ing. Stuttgart 1981

Steffen, Werner, Zum semiotischen Aufbau ästhetischer Zustände von Bildwerken. Diss. Stuttgart 1981

Toth, Alfred, Zeichen und Spuren. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009

## 28. Die Zyklizität von Zeichen und Spuren

1. Eine Zeichenrelation kann entweder in ihrer allgemeinen Form

$$ZR = (3.a \ 2.b \ 1.c)$$

oder in ihrer kategorialen Form

$$ZR = [[3.2], [a.b], [[2.1], [b.c]],$$

nach ihrer Rückführung auf die allgemeine Form, auf die Isomorphieklasse ihrer Spuren abgebildet werden:

$$ZR \rightarrow SR = (3_{\rightarrow a} 2_{\rightarrow b} 1_{\rightarrow c}).$$

Wie aus Toth (2009b) hervorgeht, ist die Isomorphieklasse einer Spurenklasse immer das ganze System der Peirceschen Zeichenklassen, aufgefasst als Menge von drei Intervallklassen entsprechend den drei Hauptbezügen des Zeichens.

2. Seien A, B, C paarweise verschiedene Werte, sog. triadische Hauptwerte, und a, b, c paarweise verschiedene Werte, sog. trichotomische Stellenwerte, dann gibt es vier Möglichkeiten zur formalen Darstellung einer Spur:

$$1. OR_{sp} = (A_{\rightarrow a}, B_{\rightarrow b}, C_{\rightarrow c})$$

$$2. Bi-OR_{sp} = (A_{a \rightarrow a}, B_{b \rightarrow b}, C_{c \rightarrow c})$$

$$3. Sp_{OR} = (\rightarrow a, \rightarrow b, \rightarrow c) \equiv (\rightarrow a_A, \rightarrow b_B, \rightarrow c_C)$$

$$4. Bi-Sp_{OR} = (\rightarrow a_A, \rightarrow b_B, \rightarrow c_C) \equiv (a \rightarrow a_A, b \rightarrow b_B, c \rightarrow c_C),$$

d.h. auf zwei verschieden stark reduzierte Weisen entweder auf Spuren oder als Bispuren (vgl. Toth 2009a). Da die Bi-Spuren allgemeiner sind als die „gewöhnlichen“ Spuren – sie sind nämlich mit den Nullzeichen kompatibel -, ergibt sich als Reduktionsschema einer Zeichen- oder Objektklasse auf ihre Spuren das folgende Schema:

$$(A.a B.b C.c)$$

↓

$$(A_{\rightarrow a}, B_{\rightarrow b}, C_{\rightarrow c})$$

↓

$$(A_{a \rightarrow a}, B_{b \rightarrow b}, C_{c \rightarrow c})$$

↓

$$(\rightarrow a_A, \rightarrow b_B, \rightarrow c_C)$$

↓

$$(a \rightarrow a_A, b \rightarrow b_B, c \rightarrow c_C)$$

Umgekehrt kann man aber das folgende Gesetz zur Vereinfachung von Bi-Spuren verwenden

$$(A \rightarrow B) \circ (B \rightarrow B) = (A \rightarrow B),$$

d.h.  $(A \rightarrow B) \circ \text{id}_B,$

und erhält so

$$(\rightarrow a_A, \rightarrow b_B, \rightarrow c_C)$$

bzw.

$$(A_{\rightarrow a}, B_{\rightarrow b}, C_{\rightarrow c})$$

und hieraus

$$(A.a B.b C.c),$$

allerdings mit der Einschränkung, dass Spuren über Intervallen von Subzeichen definiert sind. Die Relation zwischen Reduktion von Zeichen oder Objekten auf Spuren und Produktion von Zeichen oder Objekten aus Spuren ist somit zyklisch, aber trotzdem ist sozusagen der Weg hin und zurück nicht derselbe, denn der Hauptzyklus ist eingebettet in Nebenzyklen, die sich wiederum dadurch ergeben, dass die Spuren über Intervallen von Subzeichen definiert sind.

## Bibliographie

Toth, Alfred, Eine einheitliche Begründung der Semiotik auf der Basis von Bi-Spuren. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009a

## 29. Das maximale 3-adisch 4-kontexturale semiotische Spurensystem

Das vorliegende Kapitel beruht auf Kap. 3 meines Buches „The Trip into the Light“ (Toth 2008) und bringt das maximale permutative semiotische System (vgl. Toth 2008a, S. 177 ff.), basierend auf der triadischen Peirceschen Zeichenklasse, d.h. ohne ihre Erweiterung durch Nullzeichen (vgl. Toth 2009a, b), und zwar in 4 semiotischen Kontexturen (vgl. Kaehr 2008), und zwar deswegen, weil es **das extensivste, komplexeste und operabelste unter den bisher bekannten semiotischen Systemen darstellt**. Um die charakteristischen „Stufenbauten“ nicht zu zerstören, folgt der technische Teil, trotz dem Preis schwerer Lesbarkeit, in kleinerem Druck.

### 1. Permutation der Zeichenklassen

$((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{ijk} (1 \rightarrow c)_{ijk})$

$((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{ijk} (1 \rightarrow c)_{ikj})$      $((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{ikj} (1 \rightarrow c)_{ikj})$

$((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{ijk} (1 \rightarrow c)_{jik})$      $((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{ikj} (1 \rightarrow c)_{jik})$      $((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{jik} (1 \rightarrow c)_{jik})$

$((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{ijk} (1 \rightarrow c)_{jki})$      $((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{ikj} (1 \rightarrow c)_{jki})$      $((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{jik} (1 \rightarrow c)_{jki})$

$((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{ijk} (1 \rightarrow c)_{kij})$      $((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{ikj} (1 \rightarrow c)_{kij})$      $((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{jik} (1 \rightarrow c)_{kij})$

$((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{ijk} (1 \rightarrow c)_{kji})$      $((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{ikj} (1 \rightarrow c)_{kji})$      $((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{jik} (1 \rightarrow c)_{kji})$

$((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{jki} (1 \rightarrow c)_{jki})$

$((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{jki} (1 \rightarrow c)_{kij})$      $((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{kij} (1 \rightarrow c)_{kij})$

$((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{jki} (1 \rightarrow c)_{kji})$      $((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{kij} (1 \rightarrow c)_{kji})$      $((3 \rightarrow a)_{ijk} (2 \rightarrow b)_{kji} (1 \rightarrow c)_{kji})$







































$$((1 \rightarrow c)_{jik} (2 \rightarrow b)_{ijk} (3 \rightarrow a)_{kji}) \quad ((1 \rightarrow c)_{jik} (2 \rightarrow b)_{ikj} (3 \rightarrow a)_{kji}) \quad ((1 \rightarrow c)_{jik} (2 \rightarrow b)_{jik} (3 \rightarrow a)_{kji})$$

$$((1 \rightarrow c)_{jki} (2 \rightarrow b)_{ijk} (3 \rightarrow a)_{kji}) \quad ((1 \rightarrow c)_{jki} (2 \rightarrow b)_{ikj} (3 \rightarrow a)_{kji}) \quad ((1 \rightarrow c)_{jki} (2 \rightarrow b)_{jik} (3 \rightarrow a)_{kji})$$

$$((1 \rightarrow c)_{kij} (2 \rightarrow b)_{ijk} (3 \rightarrow a)_{kji}) \quad ((1 \rightarrow c)_{kij} (2 \rightarrow b)_{ikj} (3 \rightarrow a)_{kji}) \quad ((1 \rightarrow c)_{kij} (2 \rightarrow b)_{jik} (3 \rightarrow a)_{kji})$$

$$((1 \rightarrow c)_{kji} (2 \rightarrow b)_{ijk} (3 \rightarrow a)_{kji}) \quad ((1 \rightarrow c)_{kji} (2 \rightarrow b)_{ikj} (3 \rightarrow a)_{kji}) \quad ((1 \rightarrow c)_{kji} (2 \rightarrow b)_{jik} (3 \rightarrow a)_{kji})$$

$$((1 \rightarrow c)_{jki} (2 \rightarrow b)_{jki} (3 \rightarrow a)_{kji})$$

$$((1 \rightarrow c)_{kij} (2 \rightarrow b)_{jki} (3 \rightarrow a)_{kji}) \quad ((1 \rightarrow c)_{kij} (2 \rightarrow b)_{kij} (3 \rightarrow a)_{kji})$$

$$((1 \rightarrow c)_{kji} (2 \rightarrow b)_{jki} (3 \rightarrow a)_{kji}) \quad ((1 \rightarrow c)_{kji} (2 \rightarrow b)_{kij} (3 \rightarrow a)_{kji}) \quad ((1 \rightarrow c)_{kji} (2 \rightarrow b)_{kji} (3 \rightarrow a)_{kji})$$

## 1. Permutation der Realitätsthematiken

$$((c \rightarrow 1)_{kji} (b \rightarrow 2)_{kji} (a \rightarrow 3)_{kji})$$

$$((c \rightarrow 1)_{jki} (b \rightarrow 2)_{kji} (a \rightarrow 3)_{kji}) \quad ((c \rightarrow 1)_{jki} (b \rightarrow 2)_{jki} (a \rightarrow 3)_{kji})$$

$$((c \rightarrow 1)_{kij} (b \rightarrow 2)_{kji} (a \rightarrow 3)_{kji}) \quad ((c \rightarrow 1)_{kij} (b \rightarrow 2)_{jki} (a \rightarrow 3)_{kji}) \quad ((c \rightarrow 1)_{kij} (b \rightarrow 2)_{kij} (a \rightarrow 3)_{kji})$$

$$((c \rightarrow 1)_{ikj} (b \rightarrow 2)_{kji} (a \rightarrow 3)_{kji}) \quad ((c \rightarrow 1)_{ikj} (b \rightarrow 2)_{jki} (a \rightarrow 3)_{kji}) \quad ((c \rightarrow 1)_{ikj} (b \rightarrow 2)_{kij} (a \rightarrow 3)_{kji})$$

$$((c \rightarrow 1)_{jik} (b \rightarrow 2)_{kji} (a \rightarrow 3)_{kji}) \quad ((c \rightarrow 1)_{jik} (b \rightarrow 2)_{jki} (a \rightarrow 3)_{kji}) \quad ((c \rightarrow 1)_{jik} (b \rightarrow 2)_{kij} (a \rightarrow 3)_{kji})$$

$$((c \rightarrow 1)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{kji} (a \rightarrow 3)_{kji}) \quad ((c \rightarrow 1)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{jki} (a \rightarrow 3)_{kji}) \quad ((c \rightarrow 1)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{kij} (a \rightarrow 3)_{kji})$$

$$((c \rightarrow 1)_{ikj} (b \rightarrow 2)_{ikj} (a \rightarrow 3)_{kji})$$









































$((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{kji} (c \rightarrow 1)_{kji})$

$((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{kji} (c \rightarrow 1)_{jki}) \quad ((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{jki} (c \rightarrow 1)_{jki})$

$((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{kji} (c \rightarrow 1)_{kij}) \quad ((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{jki} (c \rightarrow 1)_{kij}) \quad ((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{kij} (c \rightarrow 1)_{kij})$

$((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{kji} (c \rightarrow 1)_{ikj}) \quad ((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{jki} (c \rightarrow 1)_{ikj}) \quad ((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{kij} (c \rightarrow 1)_{ikj})$

$((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{kji} (c \rightarrow 1)_{jik}) \quad ((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{jki} (c \rightarrow 1)_{jik}) \quad ((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{kij} (c \rightarrow 1)_{jik})$

$((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{kji} (c \rightarrow 1)_{ijk}) \quad ((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{jki} (c \rightarrow 1)_{ijk}) \quad ((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{kij} (c \rightarrow 1)_{ijk})$

$((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{ikj} (c \rightarrow 1)_{ikj})$

$((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{ikj} (c \rightarrow 1)_{jik}) \quad ((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{jki} (c \rightarrow 1)_{jik})$

$((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{ikj} (c \rightarrow 1)_{ijk}) \quad ((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{jik} (c \rightarrow 1)_{ijk}) \quad ((a \rightarrow 3)_{ijk} (b \rightarrow 2)_{ijk} (c \rightarrow 1)_{ijk})$

## Bibliographie

Kaehr, Rudolf, Kaehr, Rudolf, Diamond Semiotics. <http://rudys-diamondstrategies.blogspot.com/2008/12/diamond-semiotics.html> (2008)

Toth, Alfred, Semiotische Strukturen und Prozesse. Klagenfurt 2008 (Toth 2008a)

Toth, Alfred, The Trip into the Light. Klagenfurt 2008 (Toth 2008b)

Toth, Alfred, Das Nullzeichen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009a

Toth, Alfred, Nullzeichen in semiotischen Termen mit variablen Domänen und Codomänen sowie invertierbaren Abbildungen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009b

### 30. Kontexturierte semiotische Spuren

1. In Toth (2009b) wurde die Spurenrelation als triadisch-trichotomische Menge von Spuren im Sinne von Subzeichen mit unscharfer Referenz eingeführt

$$Skl = ((3.a) \times (2.b) \times (1.c) \times)$$

Die Subzeichen sind demnach je nach triadischem Bezug weder als Objekte, noch als Relationen, sondern als probabilistische „Zwitter“ aus je einem Intervall definiert, so zwar dass gilt

$$(3.a) = \{ \langle x.y \rangle \mid \langle x.y \rangle \in [3.1, 3.3] \}$$

$$(2.b) = \{ \langle x.y \rangle \mid \langle x.y \rangle \in [2.1, 2.3] \}$$

$$(1.c) = \{ \langle x.y \rangle \mid \langle x.y \rangle \in [1.1, 1.3] \}$$

2. Nun hatte Rudolf Kaehr in einer brillanten Arbeit einen Weg vorgeschlagen, um die Semiotik, die seiner Ansicht nach strikt monokontextural ist, meiner Meinung nach sich jedoch in einer Zwitterposition zwischen Mono- und Polykontexturalität befindet, zu kontexturieren (Kaehr 2008). Kaehr geht von folgender Matrix kontexturierter Subzeichen in einer 4-kontexturalen Semiotik aus:

$$\left( \begin{array}{ccc} 1.1_{1,3,4} & 1.2_{1,4} & 1.3_{3,4} \\ 2.1_{1,4} & 2.2_{1,2,4} & 2.3_{2,4} \\ 3.1_{3,4} & 3.2_{2,4} & 3.3_{2,3,4} \end{array} \right)$$

Demgegenüber basiert die in Toth (2009a) eingeführte semiotische Spuretheorie auf der folgenden sog. Spurenmatrix:

$$\left( \begin{array}{c|ccc} \emptyset \rightarrow 1 & 1 \rightarrow 1 & 1 \rightarrow 2 & 1 \rightarrow 3 \\ \emptyset \rightarrow 2 & 1 \leftarrow 2 & 2 \rightarrow 2 & 2 \rightarrow 3 \\ \emptyset \rightarrow 3 & 1 \leftarrow 3 & 2 \leftarrow 3 & 3 \rightarrow 3 \end{array} \right) \quad \left( \begin{array}{ccc} 1 \rightarrow \emptyset & 2 \rightarrow \emptyset & 3 \rightarrow \emptyset \\ \hline 1 \rightarrow 1 & 1 \leftarrow 2 & 1 \leftarrow 3 \\ 1 \rightarrow 2 & 2 \rightarrow 2 & 2 \leftarrow 3 \\ 1 \rightarrow 3 & 2 \rightarrow 3 & 3 \rightarrow 3 \end{array} \right)$$

Besonders dann, wenn wir uns mit kontexturierten semiotischen Termen befassen, ist es wichtig, die Transponierte stets bei der Hand zu haben, denn der Clou der Kontexturierung in der Semiotik besteht ja darin, dass der sonst gültige logische Identitätssatz aufgehoben wird, vgl. etwa das spuretheoretische Äquivalent der eigenrealen Zeichenklasse/Realitätsthematik

$$(3.1 \ 2.2 \ 1.3) \rightarrow (1 \leftarrow 3 \ 2 \rightarrow 2 \ 1 \rightarrow 3).$$

In einer monokontexturalen Semiotik gilt natürlich

$$\times(1 \leftarrow 3 \ 2 \rightarrow 2 \ 1 \rightarrow 3) = (1 \leftarrow 3 \ 2 \rightarrow 2 \ 1 \rightarrow 3).$$

Allerdings haben wir in einer polykontexturalen Semiotik (man betrachte die Kontexturenmatrix):

$$\times(3.1_{3,4} \ 2.2_{1,2,4} \ 1.3_{3,4}) = (3.1_{4,3} \ 2.2_{4,2,1} \ 1.3_{4,3}),$$

d.h. es gilt

$$(3.1_{3,4} \ 2.2_{1,2,4} \ 1.3_{3,4}) \neq (3.1_{4,3} \ 2.2_{4,2,1} \ 1.3_{4,3}).$$

Somit bekommen wir für die „Eigenrealität“ ihrer kontexturierten Spur

$$\times((1 \leftarrow 3)_{3,4} \ (2 \rightarrow 2)_{1,2,4} \ (1 \rightarrow 3)_{3,4}) = ((1 \leftarrow 3)_{4,3} \ (2 \rightarrow 2)_{4,2,1} \ (1 \rightarrow 3)_{4,3}),$$

d.h. also wiederum

$$((1 \leftarrow 3)_{3,4} \ (2 \rightarrow 2)_{1,2,4} \ (1 \rightarrow 3)_{3,4}) \neq ((1 \leftarrow 3)_{4,3} \ (2 \rightarrow 2)_{4,2,1} \ (1 \rightarrow 3)_{4,3}).$$

3. Es gibt somit keine kontexturierten Zeichenklassen und keine kontexturierten Spurenklassen, welche mit ihren Realitätsthematik zusammenfallen, d.h. es gibt in einer Semiotik, welche über mehr als 1 Kontextur führen, auch keine Eigenrealität und damit in einem gewissen Sinne (basierend auf Bense 1992) auch kein „Zeichen an sich“. Wenn es aber kein „Zeichen an sich“ gibt, darf man sich fragen, ob es dann so etwas wie ein Zeichen überhaupt gebe. Da diese und meine übrigen Arbeiten nicht existieren würden, wenn es keine Zeichen gäbe, stellen wir fest, dass Zeichen offenbar Substitutionsschemata sind, die es vom polykontexturalen Standpunkt aus nicht geben kann, d.h. sie können folglich nur monokontextural existieren, wenn also Substitutens und Substituendum logisch und erkenntnistheoretisch sowie ontologisch geschieden sind. Andererseits beruht aber gerade Kaehrs nicht zu überschätzendes Verdienst darin, gezeigt zu haben, dass polykontexturale Zeichen existieren KÖNNEN. Man sollte trotzdem aber nicht vergessen, dass Kontexturen im Grunde nur dort relevant sind, wo wir uns auf der Ebene der Keno- und Morphogrammatik befinden, d.h. weit unterhalb der Semiotik und also dort, wo die Dichotomie von Zeichen und Bezeichnetem noch nicht etabliert ist, wo also zwischen ihnen keine Ordnungs-, sondern eine Austauschrelation existiert. Damit ist aber ein anderes, sehr stichhaltiges Argument GEGEN die Möglichkeit einer polykontexturalen Semiotik genannt.

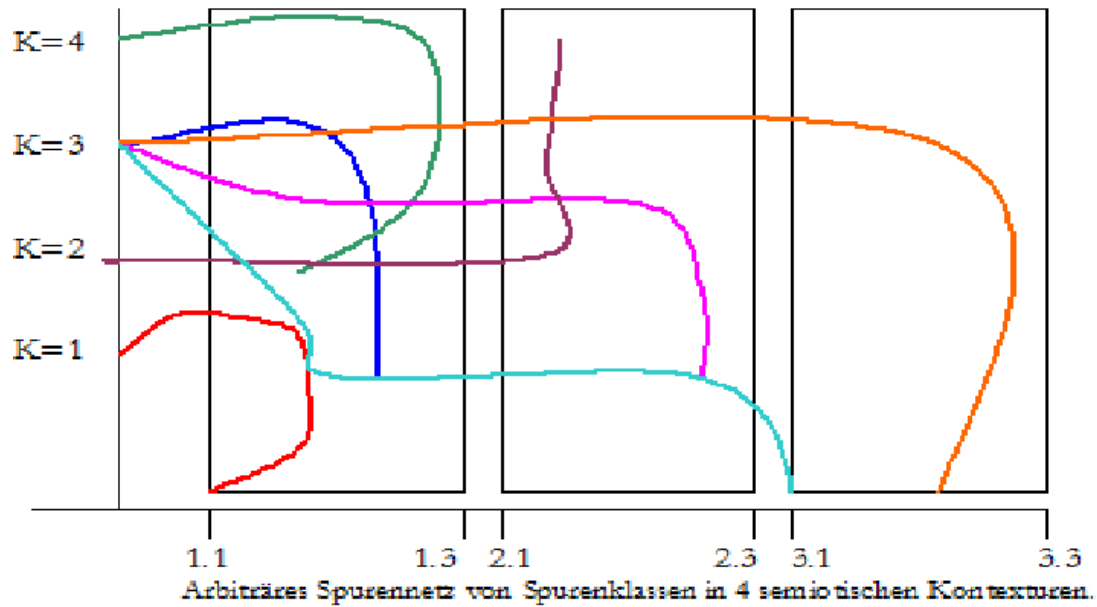
Dennoch hindert uns nichts daran, die allgemeine Form kontexturierter Spurenklassen aufzustellen:

$$\text{SpKI} = ((3 \rightarrow a)_{\alpha, \beta, \gamma} (2 \rightarrow b)_{\delta, \epsilon, \zeta} (1 \rightarrow c)_{\eta, \theta, \iota}),$$

mit  $\alpha, \dots, \iota \in \{\emptyset, 1, 2, 3\}$ , wenn  $K = 4$ ,

und  $\alpha, \dots, \iota = \emptyset$  gdw SpKL keine genuinen Subzeichen, d.h. keine identitiven Morphismen enthält.

Wenn man ferner am üblichen Koordinatensystem zur Definition der Subzeichen als Punkte in der euklidischen Zahlenebene festhält, kann man die Relationen zwischen Intervallpunkten von Spuren und ihren Kontexturen wie folgt darstellen:



## Bibliographie

Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992

Kaehr, Rudolf, Diamond Semiotics,

<http://www.thinkartlab.com/pkl/lola/Diamond%20Semiotics/Diamond%20Semiotics.pdf> (2008)

Toth, Alfred, Zeichen und Spuren. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009a

Toth, Alfred, Die Spurenrelation als unscharfe Menge von Relationen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009b

### 31. Verschachtelung und komplementäre Verschachtelung bei Spurenrelationen

1. Wie bereits aus früheren Publikationen bekannt, ist die semiotische Spurenrelation

$$Skl = ((3.a) \prec (2.b) \prec (1.c) \prec)$$

auf Intervallen von Subzeichen definiert:

$$(3.a) = \{ \langle x.y \rangle \mid \langle x.y \rangle \in [3.1, 3.3] \}$$

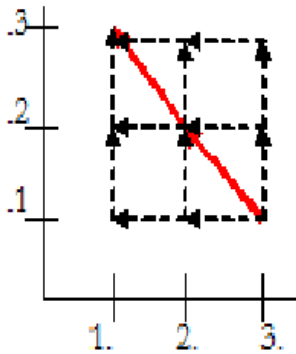
$$(2.b) = \{ \langle x.y \rangle \mid \langle x.y \rangle \in [2.1, 2.3] \}$$

$$(1.c) = \{ \langle x.y \rangle \mid \langle x.y \rangle \in [1.1, 1.3] \}.$$

Intuitiv bedeutet dies, dass ein Subzeichen Sz als unscharfe Menge zu weniger als 100% einer Spurenrelation angehören kann, woraus folgt, dass die entsprechende Trichotomie zu (100 – SZ %) durch eines der beiden anderen Subzeichen „gefüllt“ ist. Statisch dargestellt (und daher verzerrt), sieht das wie folgt aus, wenn wir als Beispiel ((3.1)  $\prec$  (2.2)  $\prec$  (1.3)  $\prec$ ) wählen:

<	<	1.3
<	2.2	<
3.1	<	<

2. Wenn wir diese Intervall-Relationen in einem Ausschnitt des kartesischen Koordinatensystems darstellen, können wir die „alternativen“ Relationen gestrichelt einzeichnen:

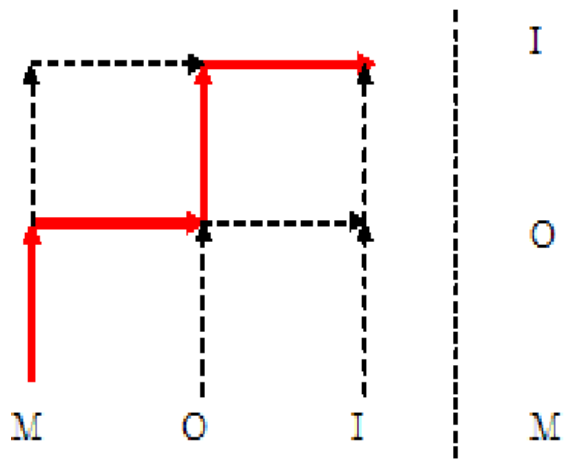


Nun ist die Peircesche Zeichenrelation nach Bense (1979, S. 53, 67) als eine verschachtelte Relation über einer monadischen, einer dyadischen und einer triadischen Relation definiert:

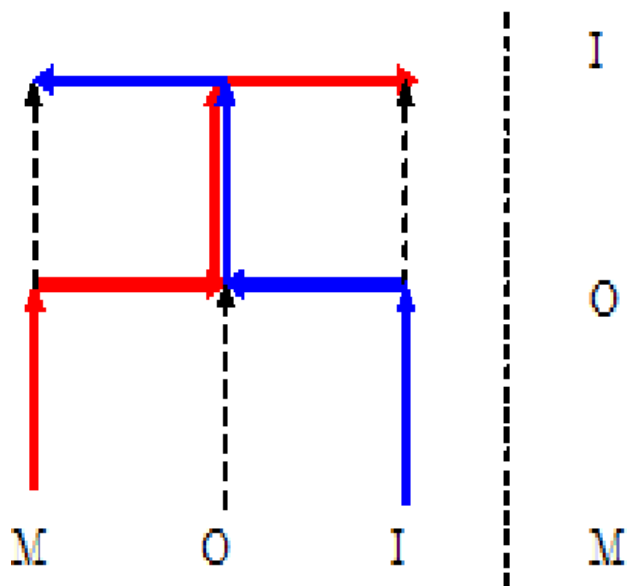
$$ZR = ((M), ((M \rightarrow O) \rightarrow (O \rightarrow I)))$$

Dieser Definition entspricht also der folgende „Stufenbau“, im Modell ausgezogen rot eingezeichnet, während die nicht-definierten Relationen schwarz gestrichelt sind:





Wir können diese Verhältnisse aber auch wie folgt darstellen:



Das bedeutet also, dass ein vollständiges Zeichenschema, dem als Basis die durch kartesische Multiplikation der Primzeichen entstandene semiotische Matrix zugrunde liegt, nicht nur durch die Peircesche Stufendefinition

$$ZR = ((M), ((M \rightarrow O) \rightarrow (O \rightarrow I))),$$

sondern zusätzlich durch ihr Komplement

$$ZR = ((I), ((I \rightarrow O) \rightarrow (O \rightarrow M)))$$

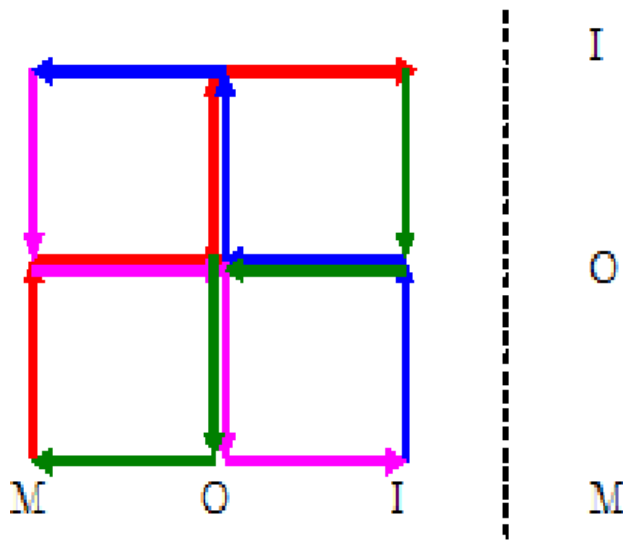
definiert ist. Da hierbei

$$I \leftrightarrow M$$

ausgetauscht werden, wobei

O = Einselement

ist, haben wir eine semiotische Gruppe vor uns, und zwar die abelsche Gruppe  $(PZ, \circ_2)$ , welche in Toth (2008, S. 40) behandelt worden war. Wie man allerdings anhand des obigen Modells ersieht, benötigen wir für eine Definition der bisher noch immer nicht definierten Punkte zwei weitere semiotische Stufenfunktionen, die im unten stehenden Modell lila und grün eingezeichnet sind:



Im Unterschied zum komplementären verschachtelten Relationenweg-Paar rot und blau, ist das Paar lila und grün jedoch invers, d.h. die Wege werden nun nicht mehr von „unten nach oben“, sondern „von oben nach unten“ auf der „Treppe“ durchlaufen:

$$ZR = ((M), ((M \rightarrow O) \rightarrow (O \rightarrow I)))^{-1} =$$

$$ZR = (((I \rightarrow O) \rightarrow (O \rightarrow M)), M)$$

$$ZR = ((I), ((I \rightarrow O) \rightarrow (O \rightarrow M)))^{-1} =$$

$$ZR = (((M \rightarrow O) \rightarrow (O \rightarrow I)), (I))$$

Man benötigt demnach 4 Zeichendefinitionen, um alle Punkte der semiotischen 3x-Matrix zu definieren, die über  $ZR = (M, O, I)$  definierbar ist. Dabei handelt es sich um zwei Paare von komplementären Zeichenrelationen, die abelsche Gruppen mit Einselement = (.2.) bilden, wobei die beiden Paare zueinander inverse Funktionen sind.

## Bibliographie

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2006, 2. Aufl. ebda. 2008

### 32. Spur, Bi-Spur und Dualisation

1. Wie in Toth (2009a, b) gezeigt wurde, können Spuren einerseits dadurch verallgemeinert werden, dass sie als Bi-Spuren eingeführt werden, andererseits gibt es zwei verschiedene allgemeine Darstellungsmöglichkeiten sowohl für Spuren als auch für Bi-Spuren:

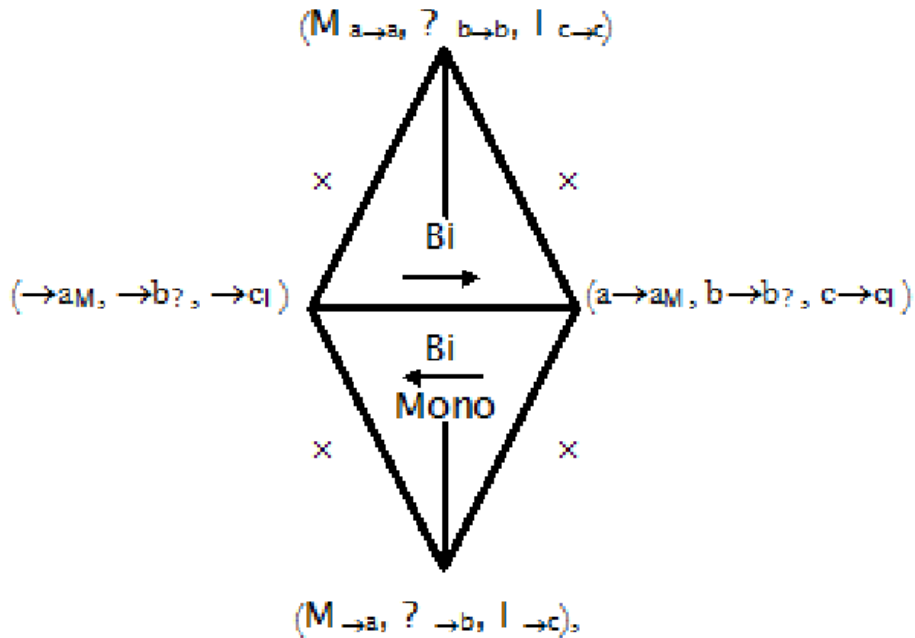
$$1.1. \text{ Spur} = (\mathcal{M}_{\rightarrow a}, \Omega_{\rightarrow b}, \mathcal{J}_{\rightarrow c})$$

$$1.2. \text{ Bi-Spur} = (\mathcal{M}_{a \rightarrow a}, \Omega_{b \rightarrow b}, \mathcal{J}_{c \rightarrow c})$$

$$1.3. \text{ duale Spur} = (\rightarrow a m, \rightarrow b \Omega, \rightarrow c g)$$

$$1.4. \text{ duale Bi-Spur} = (a \rightarrow a m, b \rightarrow b \Omega, c \rightarrow c g)$$

2. Nachdem es sich gezeigt hat, dass die Einführung des Diamantenmodells für die Semiotik zu überraschenden neuen Einsichten führt (vgl. Toth 2008, S. 177 ff., Kaehr 2008a, b), wird hier, ergänzend die semiotische Basiskonzeption der Spur, diese in ihrer vierfachen Ausprägung als semiotisch-spurentheoretischer Diamant dargestellt:



d.h. von unten nach oben sowie von links nachs rechts werden Spuren in allgemeinere Bi-Spuren transformiert. Entlang der Seiten des Rhombus bzw. Diamanten findet Dualisation statt.

3. Seien nun  $\mathcal{M} = \emptyset_m$ ,  $\Omega = \emptyset_\Omega$  und  $\mathcal{F} = \emptyset_f$ , dann haben wir

3.1. Spur =  $(\emptyset_{\to a}, \emptyset_{\to b}, \emptyset_{\to c})$

3.2. Bi-Spur =  $(\emptyset_{a \to a}, \emptyset_{b \to b}, \emptyset_{c \to c})$

3.3. duale Spur =  $(\to \emptyset_m, \to \emptyset_\Omega, \to \emptyset_f)$

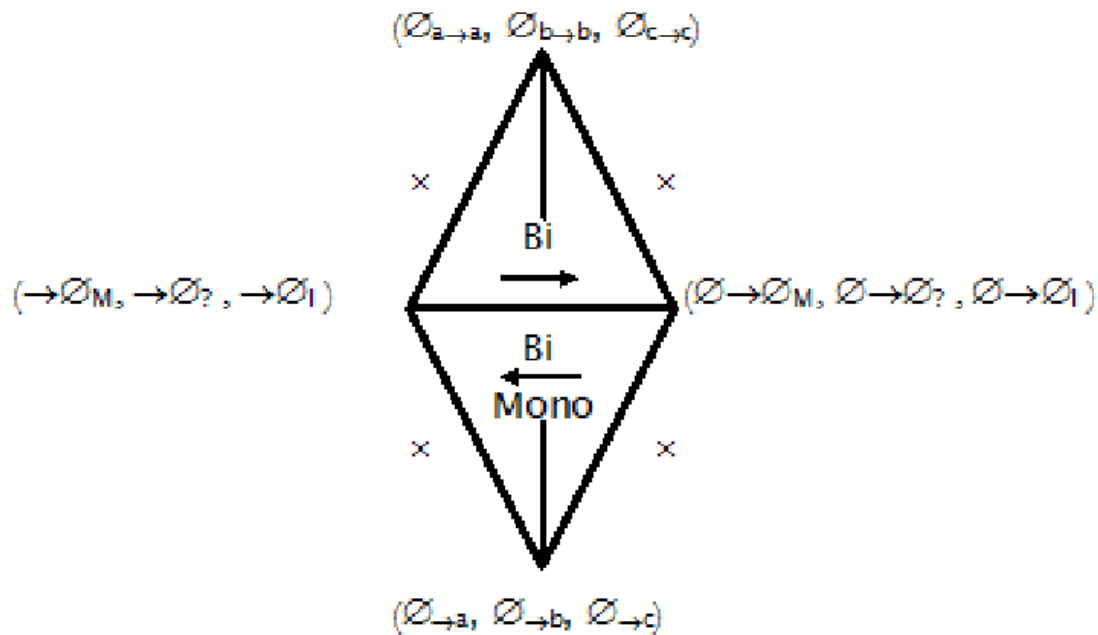
3.4. duale Bi-Spur =  $(\emptyset \to \emptyset_m, \emptyset \to \emptyset_\Omega, \emptyset \to \emptyset_f)$ ,

und zwar deshalb, weil

1.  $\emptyset = \{\emptyset_m, \emptyset_\Omega, \emptyset_f\}$

2. Es gilt:  $\times(\emptyset_{\to a}) = a \to_{\{\emptyset_m, \emptyset_\Omega, \emptyset_f\}}$ ,

dann haben wir entsprechend zum Nicht-Nullzeichen-Diamanten den folgenden Nullzeichen-Diamanten:



## Bibliographie

Toth, Alfred, Zeichen und Spuren. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009a

Toth, Alfred, Objekte und Spuren. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009b

### 33. Die Reduktion von Spuren auf Abbildungen

1. Die semiotische Spuretheorie wurde in Toth (2009) mit dem Ziele eingeführt, Subzeichen als „gerichtete Objekte“ einzuführen, und zwar in Analogie zu den „gerichteten Relationen“ der Pfeile oder Abbildungen der (semiotischen) Kategoriethorie (vgl. Mac Lane 1972, S. 2). Subzeichen haben ja einen eigentümlichen Doppelcharakter, insofern sie einerseits als stabile Momente innerhalb von Semiosen fungieren, andererseits aber diese Semiosen selber als dynamische Prozesse festlegen (Bense 1975). Wenn in diesem Kapitel versucht

wird, gerichtete Objekte auf ihre Abbildungsspuren zu reduzieren, dann bedeutet dies also nicht dasselbe, wie das Konzept des gerichteten Objektes aufzugeben und einfach zu den bereits von Bense (1981) eingeführten semiotischen Morphismen zurückzukehren. Die Abbildungen an semiotischen Objekten sind ja nur in Spuren vorhanden, die Objekte in semiotischen Morphismen sind hingegen absent.

2. Nach Toth (2009) gibt es vier grundsätzliche Möglichkeiten, semiotische Spuren zu notieren:

$$2.1. \text{ Spur} = (\mathcal{M}_{\rightarrow a}, \Omega_{\rightarrow b}, \mathcal{J}_{\rightarrow c})$$

$$2.2. \text{ Bi-Spur} = (\mathcal{M}_{a \rightarrow a}, \Omega_{b \rightarrow b}, \mathcal{J}_{c \rightarrow c})$$

$$2.3. \text{ duale Spur} = (\rightarrow a_m, \rightarrow b_\Omega, \rightarrow c_g)$$

$$2.4. \text{ duale Bi-Spur} = (a \rightarrow a_m, b \rightarrow b_\Omega, c \rightarrow c_g),$$

d.h. eine abstrakte semiotische Spur ist ein Objekt

$\langle x.y \rangle$ ,

in welchem beide Variablen Platzindikatoren sind, und zwar gibt der erste Platzindikator  $x$  die triadische und der zweite Platzindikator  $y$  die trichotomische Stellung der Spur in einem statischen Subzeichen oder in einer dynamischen Semiose an.  $x$  kann also die drei triadischen Hauptwerte annehmen

$$x \in \{1., 2., 3.\},$$

wobei (1.) dadurch definiert ist, dass in einer linearen Zeichenverknüpfung nur Rechtsverbindung besteht. Bei (2.) besteht sowohl Links- als auch Rechtsverbindung, und bei (3.) besteht nur Linksverbindung. Damit kann man also  $x$  allein durch Abbildungen wie folgt darstellen:

$$x \in \{\rightarrow, \leftarrow\rightarrow, \leftarrow\}.$$

Dasselbe gilt natürlich für

$$y \in \{.1, .2, .3\}$$

als trichotomischen Platzindikator, nur, dass hier der Fall

$$x = y$$

berücksichtigt werden muss, denn er vereinfacht redundante Anhäufungen von Pfeilen bei genuinen Subzeichen, d.h. identitiven Morphismen. Wir wollen hierfür als zusätzlichen Pfeil

↓

einführen. Damit kann man also schreiben

$$(1.1) \equiv (\rightarrow.\downarrow)$$

$$(2.2) \equiv (\leftarrow\rightarrow.\downarrow)$$

$$(3.3) \equiv (\rightarrow.\downarrow)$$

anstatt  $(\rightarrow\rightarrow)$ , was polysem wäre, da hiermit auch (3.1) gemeint sein kann, anstatt des umständlichen  $(\leftarrow\rightarrow.\leftarrow\rightarrow)$ , sowie anstatt  $(\leftarrow\leftarrow)$ , das ebenfalls polysem ist, da es auch (1.3) mitbegrift.

3. Wir haben somit gerichtete Objekte nicht auf Objekte, sondern auf Abbildungen zurückgeführt, denn mit dem hier eingeführten, auf Toth (2008b) beruhenden „Pfeil-System“ haben wir (fast) vollkommene Substanzfreiheit erreicht. Die Pfeil-Spuren-Matrix sieht also wie folgt aus:

$$\left( \begin{array}{ccc} \rightarrow.\downarrow & \leftarrow.\leftarrow\rightarrow & \leftarrow\leftarrow \\ \leftarrow\rightarrow.\rightarrow & \leftarrow\rightarrow.\downarrow & \leftarrow\rightarrow.\leftarrow \\ \rightarrow.\rightarrow & \rightarrow.\leftarrow\rightarrow & \rightarrow.\downarrow \end{array} \right)$$



Man sieht hier, vor allem dank des zur Vereinfachung und Desambiguierung eingeführten Pfeils  $\downarrow$  die Dualität der Subzeichen:

$$\times(\leftarrow.\leftarrow\rightarrow) = \leftarrow\rightarrow.\rightarrow$$

$$\times(\leftarrow\leftarrow) = \rightarrow.\rightarrow$$

$$\times(\leftarrow\rightarrow.\leftarrow) = \rightarrow.\leftarrow\rightarrow,$$

woraus man erkennt, dass also nicht nur die Pfeilrichtungen, wie in der Kategoriethorie, umgekehrt werden, sondern natürlich auch das Ordnungsschema  $\langle x.y \rangle$  selbst, d.h. zwischen dem triadischen und dem trichotomischen Platzindikator.

Eine Zeichenklasse wie z.B. (3.1 2.1 1.3) kann danach dargestellt werden:

3.1. als gewöhnliche Zeichenklasse: Zkl = (3.1 2.1 1.3).

3.2. als Spur: Spkl = ( $3_{\rightarrow 1}$ ,  $2_{\rightarrow 1}$ ,  $1_{\rightarrow 3}$ ).

3.3. als Bi-Spur: BiSpkl = ( $3_{1 \rightarrow 1}$ ,  $2_{1 \rightarrow 1}$ ,  $1_{3 \rightarrow 3}$ ).

3.4. als duale Spur = ( $\rightarrow 1_3$ ,  $\rightarrow 1_2$ ,  $\rightarrow 3_1$ ).

3.5. duale Bi-Spur = ( $1 \rightarrow 1_3$ ,  $1 \rightarrow 1_2$ ,  $3 \rightarrow 3_1$ ).

3.6. als Klasse von kategoriethoretischen statischen Morphismen:

$$\text{MsKl} = (\alpha^\circ \beta^\circ, \alpha^\circ, \beta\alpha).$$

3.7. als Klasse von kategoriethoretischen dynamischen Morphismen (vgl. Toth 2008a, S. 166 ff.): MdKl =  $[[\beta^\circ, \text{id}1], [\alpha^\circ, \beta\alpha]]$ .

3.8. als Spuren-Abbildungsklasse SpAbbKl =  $((\rightarrow.\rightarrow) (\leftarrow\rightarrow.\downarrow) (\leftarrow\leftarrow))$ .

Man kann sich in Zukunft darüber Gedanken machen, ob es sinnvoll wäre, kombinierte Formen zu benutzen.

## Bibliographie

Bense, Max, Semiotische Prozesse und Systeme. Baden-Baden 1975

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Mac Lane, Saunders, Kategorien. Berlin, New York 1972

Toth, Alfred, Semiotische Strukturen und Prozesse. Klagenfurt 2008 (2008a)

Toth, Alfred, Ein Notationssystem für semiotische Vermittlung. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2008b

Toth, Alfred, Zeichen und Spuren. In: Electronic Journal for Mathematical Semiotics, 2009

## 34. Objekte, Spuren und Zeichen

Spuren können zu Objekten ebenso wie zu Zeichen gehören. Objekte können zu Zeichen erklärt werden, und diese können via Spuren helfen, Objekte zu rekonstruieren (vgl. Toth 2009a, b). Ferner bedingt die Verallgemeinerung auf Nullzeichen die Generalisierung von Spuren zu Bi-Spuren (vgl. Toth 2009c). In diesem Kapitel wird eine vollständige formale Übersicht aller möglichen Kombinationen von Objekten, Spuren und Zeichen, allerdings beschränkt auf dyadische Subzeichen bzw. Subobjekte, d.h. ohne semiotische Objekte, Systeme u.ä., gegeben, und zwar bewusst vorerst ohne Beispiele zu liefern.

### 1. Objektrelation

$$OR = (M.a, \Omega.b, \mathcal{J}.c) \times (c.\mathcal{J}, b.\Omega, a.M)$$

#### 1.1. Leere Objektrelationen

$$LO = (\emptyset.a, \emptyset.b, \emptyset.c) \times (c.\emptyset, b.\emptyset, a.\emptyset)$$

$$LO = (M.\emptyset, \Omega.\emptyset, \mathcal{J}.\emptyset) \times (\emptyset.\mathcal{J}, \emptyset.\Omega, \emptyset.M)$$

## 2. Objektspurenrelation

$$OSR = (M_{\rightarrow a}, \Omega_{\rightarrow b}, \mathcal{J}_{\rightarrow c}) \times (c \rightarrow \mathcal{J}, b \rightarrow \Omega, c \rightarrow m)$$

### 2.1. Leere Objektspurenrelationen

$$LOSR = (\emptyset_{\rightarrow a}, \emptyset_{\rightarrow b}, \emptyset_{\rightarrow c}) \times (c \rightarrow \emptyset, b \rightarrow \emptyset, c \rightarrow \emptyset)$$

$$LOSR = (M_{\rightarrow \emptyset}, \Omega_{\rightarrow \emptyset}, \mathcal{J}_{\rightarrow \emptyset}) \times (\emptyset \rightarrow \mathcal{J}, \emptyset \rightarrow \Omega, \emptyset \rightarrow m)$$

## 3. Zeichenrelation

$$ZR = (M.a, O.b, I.c) \times (c.I \ b.O \ a.M)$$

### 3.1. Leere Zeichenrelationen

$$LZ = (\emptyset.a \ \emptyset.b \ \emptyset.c) \times (c.\emptyset \ b.\emptyset, a.\emptyset)$$

$$LZ = (M.\emptyset \ O.\emptyset \ I.\emptyset) \times (\emptyset.I \ \emptyset.O \ \emptyset.M)$$

## 4. Zeichenspurenrelation

$$ZSR = (M_{\rightarrow a}, O_{\rightarrow b}, I_{\rightarrow c}) \times (c \rightarrow I, c \rightarrow O, c \rightarrow M)$$

### 4.1. Leere Zeichenspurenrelationen

$$LZSR = (\emptyset_{\rightarrow a}, \emptyset_{\rightarrow b}, \emptyset_{\rightarrow c}) \times (c \rightarrow \emptyset, c \rightarrow \emptyset, c \rightarrow \emptyset)$$

$$LZSR = (M_{\rightarrow \emptyset}, O_{\rightarrow \emptyset}, I_{\rightarrow \emptyset}) \times (\emptyset \rightarrow I, \emptyset \rightarrow O, \emptyset \rightarrow M)$$

## 5. Bi-Objektspurenrelation

$$BOSR = (M_{\rightarrow a \rightarrow a}, \Omega_{\rightarrow b \rightarrow b}, \mathcal{J}_{\rightarrow c \rightarrow c}) \times (c \rightarrow c_{\rightarrow \mathcal{J}}, b \rightarrow b_{\rightarrow \Omega}, a \rightarrow a_{\rightarrow m})$$

### 5.1. Leere Bi-Objektspurenrelationen

$$LBOSR = (\emptyset_{\rightarrow a \rightarrow a}, \emptyset_{\rightarrow b \rightarrow b}, \emptyset_{\rightarrow c \rightarrow c}) \times (c \rightarrow c_{\rightarrow \emptyset}, b \rightarrow b_{\rightarrow \emptyset}, c \rightarrow c_{\rightarrow \emptyset})$$

$$\text{LBOSR} = (\mathcal{M}_{\emptyset \rightarrow \emptyset}, \Omega_{\emptyset \rightarrow \emptyset}, \mathcal{J}_{\emptyset \rightarrow \emptyset}) \times (\emptyset \rightarrow \emptyset \rightarrow \mathcal{J}, \emptyset \rightarrow \emptyset \rightarrow \Omega, \emptyset \rightarrow \emptyset \rightarrow \mathcal{M})$$

## 6. Bi-Zeichenspurenrelation

$$\text{BZSR} = (\mathcal{M}_{\rightarrow a \rightarrow a}, \mathcal{O}_{\rightarrow b \rightarrow b}, \mathcal{I}_{\rightarrow c \rightarrow c}) \times (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{I}, \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{O}, \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M})$$

### 6.1. Leere Bi-Zeichenspurenrelationen

$$\text{LBOSR} = (\emptyset_{\rightarrow a \rightarrow a}, \emptyset_{\rightarrow b \rightarrow b}, \emptyset_{\rightarrow c \rightarrow c}) \times (\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \emptyset, \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \rightarrow \emptyset, \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \rightarrow \emptyset)$$

$$\text{LBOSR} = (\mathcal{M}_{\emptyset \rightarrow \emptyset}, \mathcal{O}_{\emptyset \rightarrow \emptyset}, \mathcal{I}_{\emptyset \rightarrow \emptyset}) \times (\emptyset \rightarrow \emptyset \rightarrow \mathcal{I}, \emptyset \rightarrow \emptyset \rightarrow \mathcal{O}, \emptyset \rightarrow \emptyset \rightarrow \mathcal{M})$$

## Bibliographie

Toth, Alfred, Zeichen und Spuren. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009a

Toth, Alfred, Objekte als Spuren. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009b

Toth, Alfred, Eine einheitliche Begründung der Semiotik auf der Basis von Bi-Spuren. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009c

## 35. Spuren und Nullspuren

In Toth (2009) hatten wir eine erste kurze Übersicht über „Objekte, Zeichen und Spuren“ gegeben. Hier wollen wir eine vollständige Systematik liefern und auf die erstaunliche Fülle ihrer Kombinationsmöglichkeiten als einem weiteren Arbeitsinstrument der Semiotik hinweisen.

### 1. Objekte und Nullobjekte

$$1.1. (\mathcal{M}_{\rightarrow m}, \Omega_{\rightarrow \Omega}, \mathcal{J}_{\rightarrow \mathcal{J}}) \times (\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{J}, \Omega \rightarrow \Omega, \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M})$$

$$1.2. (\emptyset_{\rightarrow m}, \emptyset_{\rightarrow \Omega}, \emptyset_{\rightarrow \mathcal{J}}) \times (\mathcal{J} \rightarrow \emptyset, \Omega \rightarrow \emptyset, \mathcal{M} \rightarrow \emptyset)$$

$$1.3. (\mathcal{M} \rightarrow \emptyset, \Omega \rightarrow \emptyset, \mathcal{J} \rightarrow \emptyset) \times (\emptyset \rightarrow \mathcal{J}, \emptyset \rightarrow \Omega, \emptyset \rightarrow \mathcal{M})$$

## 2. Zeichen und Nullzeichen

$$2.1. (\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}, \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}) \times (\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{I}, \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}, \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M})$$

$$2.2. (\emptyset \rightarrow \mathcal{M}, \emptyset \rightarrow \mathcal{O}, \emptyset \rightarrow \mathcal{I}) \times (\mathcal{I} \rightarrow \emptyset, \mathcal{O} \rightarrow \emptyset, \mathcal{M} \rightarrow \emptyset)$$

$$2.3. (\mathcal{M} \rightarrow \emptyset, \mathcal{O} \rightarrow \emptyset, \mathcal{I} \rightarrow \emptyset) \times (\emptyset \rightarrow \mathcal{I}, \emptyset \rightarrow \mathcal{O}, \emptyset \rightarrow \mathcal{M})$$

## 3. Objekte und Zeichen sowie Nullobjekte und Nullzeichen

$$3.1. (\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \Omega \rightarrow \mathcal{O}, \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}) \times (\mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}, \mathcal{O} \rightarrow \Omega, \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M})$$

$$3.2. (\emptyset \rightarrow \mathcal{M}, \emptyset \rightarrow \mathcal{O}, \emptyset \rightarrow \mathcal{I}) \times (\mathcal{I} \rightarrow \emptyset, \mathcal{O} \rightarrow \emptyset, \mathcal{M} \rightarrow \emptyset)$$

## 4. Zeichen und Objekte sowie Nullzeichen und Nullobjekte

$$4.1. (\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}, \mathcal{O} \rightarrow \Omega, \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{J}) \times (\mathcal{J} \rightarrow \mathcal{I}, \Omega \rightarrow \mathcal{O}, \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M})$$

$$4.2. (\emptyset \rightarrow \mathcal{M}, \emptyset \rightarrow \Omega, \emptyset \rightarrow \mathcal{J}) \times (\mathcal{J} \rightarrow \emptyset, \Omega \rightarrow \emptyset, \mathcal{M} \rightarrow \emptyset)$$

Aus diesen 10 Relationen lassen sich also  $(10 \text{ mal } 11/2) = 55$  paarweise Kombinationen von semiotischen Systemen und semiotischen Objekten koinstruieren.

## Bibliographie

Toth, Alfred, Objekte, Spuren und Zeichen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009

### 36. Semiotische Spuren, definiert über Fuzzy-Filtern

1. Der Begriff der semiotischen Spur (vgl. Toth 2009a, b) wurde bisher als „gerichtetes Objekt“

$$Sp = X \rightarrow_a$$

mit  $X \in \{1., 2., 3.\}$  und  $a \in \{.1, .2, .3\}$

eingeführt, zusammen mit den intuitiven Angaben, dass die Codomänen von Spuren in dem Sinne mehrdeutig seien, dass sie entweder nur zu einem bestimmten Prozentsatz zum gerichteten Objekt gehören könnten oder aber dass die Codomäne auch an den Codomänen anderer Spuren partizipieren könnte.

2. Etwas wissenschaftlicher können wir vorgehen, indem wir zunächst

$$X = Y = \{1, 2, 3\}$$

und dann

$$Sp \subseteq X \times Y$$

definieren. Wegen der Fuzzy-Relationen benötigen wir sodann eine charakteristische Funktion

$$\mu_{Sp}: X \times Y \rightarrow [0; 1],$$

d.h. eine semiotische Spur kann nun z.B. zu 25% iconisch sein – und damit z.B. zu 75% symbolisch, aber auch z.B. zu 51% indexikalisch und zu 24% symbolisch.

3. Zur Definition von topologischen Filtern, die, obgleich weitgehend unbeachtet, in der Semiotik schon sehr früh von Bense eingeführt worden waren (vgl. Bense 1962, S. 114; Bense und Walther 1973, S. 30), sei hier vor allem auf die Ausführungen in Toth (2008, S. 99 ff.) verwiesen. Demnach kann als der feinste semiotische Filter einfach

$$\mathcal{F}_{\max} = \mathbb{P}ZR \setminus \emptyset = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

und als der größte semiotische Filter

$$\mathcal{F}_{\min} = \{\{1, 2, 3\}\}$$

bestimmt werden. Da die 1-stelligen Relationen natürlich nicht fuzzyfiziert zu werden brauchen, benötigen wir also nur noch

$$X = Y = Z = \{1, 2, 3\}$$

mit der „Zeichenspur“ als triadischer Entsprechung von Sp als Spur von Subzeichen

$$\text{ZSp} \subseteq X \times Y \times Z.$$

Wir haben dann analog

$$\mu_{\text{zsp}}: X \times Y \times Z \rightarrow [0; 1].$$

4. Nun kann man bekanntlich jede beliebige Menge als topologischen Raum deuten (vgl. z.B. Meschkowski 1971, S. 150). Andererseits ist in einem topologischen Raum die Umgebung einer Menge jede Teilmenge des topologischen Raumes, welche eine offene Menge enthält, die diese Menge enthält. Daraus folgt in Sonderheit, dass ein topologischer Raum „gleichzeitig durch verschiedene Umgebungssysteme definiert werden (kann), die dann aber notwendig gleichwertig sind“ (Alexandroff und Urysohn 1924, S. 258). Im Falle des größten semiotischen Filters

$$\mathcal{F}_{\min} = \{\{1, 2, 3\}\}$$

ist dieser also gleichzeitig die Umgebung der Menge der semiotischen Fundamentalkategorien. Wir können somit durch Iteration der Umgebung der elementaren semiotischen Menge  $S = \{1, 2, 3\}$  ein immer engeres System von Filtern konstruieren, die trivialerweise zugleich Ultrafilter sind:

$$\max(\mathcal{F}_{\min}) = \dots \{\{\{\{\{\{\{\{\{1, 2, 3\}\}\}\}\}\}\}\}\}\dots,$$

wobei, wie gesagt,  $\{1, 2, 3\}$

$$\mu_{\text{zsp}}: X \times Y \times Z \rightarrow [0; 1].$$

und für jede dyadische Teilmenge (Partialrelation)

$$\mu_{Sp} \subseteq \mu_{ZSp}: X \times (Y \times Z) \rightarrow [0; 1] \text{ oder } (X \times Y) \times Z$$

gilt, so dass wir hiermit also sowohl die Subzeichen als auch die Zeichenklassen (sowie Realitätsthematiken) als Spuren im Sinne von charakteristischen Mengen und Teilmengen, d.h. als auf das abgeschlossene Intervall  $[0; 1]$  abgebildete Teilmengen kartesischer Produkte definiert haben, welche als ein sich stets verengendes Filter-System über der semiotischen Grundmenge  $S = \{1, 2, 3\}$  definiert sind. Abschliessend sei bemerkt, dass, obwohl wir hier die Fuzzy-Notationen verwendet haben (vgl. z.B. Böhme 1993), welche den Begriff der Unschärfe implizieren, eine probabilistische Deutung, welche den semiotischen Verhältnissen angemessener ist, nicht ausgeschlossen ist.

### **Bibliographie**

Alexandroff, Paul/Urysohn, Paul, Zur Theorie der topologischen Räume. In: Mathematische Annalen 92, 1924, S. 258-266

Bense, Max, Theorie der Texte. Köln 1962

Bense, Max/Walther, Elisabeth, Wörterbuch der Semiotik. Köln 1973

Böhme, Gert, Fuzzy-Logik. Berlin 1993

Meschkowski, Herbert, Einführung in die moderne Mathematik. 3. Aufl. Mannheim 1971

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. 2. Aufl. Klagenfurt 2008

Toth, Alfred, Zeichen und Spuren. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009a

Toth, Alfred, Objekte als Spuren. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009b



### 37. Doppelspuren, Treppen und dreidimensionale Peirce-Zahlen

1. Eine semiotische Spur hat die allgemeine Form

$$Sp = A \rightarrow B$$

wobei  $Sp$  eine „unvollständige“ bzw. in ihrem Urbildbereich unvollständige Funktion ist, ein „gerichtetes Objekt“ mit einem probabilistisch, evtl. „unscharf“ (fuzzy) bestimmbareren Codomänenbereich, die man vielleicht auch mit Prioritäten darstellen könnte. Z.B. ist eine Spur von (2.1)

$$Sp(2.1) 2 \rightarrow \{(1), (2), (3)\}$$

so dass man, mit einer gewissen Vorsicht, also sagen könnte, die Spur eines Icons sei ein gerichtetes Objekt, d.h. ein Subzeichen, dessen Abbildungsfunktion war zur Codomäne eines Icons, aber auch eines Indexes oder Symbols führen könne.

Da wir nun aber auch Spuren der allgemeinen Formen

$$\emptyset \rightarrow B \text{ sowie } B \rightarrow \emptyset$$

haben, worin das  $\emptyset_i \in \{\emptyset.1, \emptyset.2, \emptyset.3\}$  spezifiziert werden muss, empfiehlt sich eine verallgemeinerte Einführung von Spuren mit und ohne Nullzeichen als Bi-Spuren (vgl. Toth 2009a, b), d.h. in der Form

$$Bi-Sp = A \rightarrow B \rightarrow C,$$

wobei gilt

$$(1 \rightarrow 1) \circ (1 \rightarrow 1) = (1 \rightarrow 1)$$

$$(1 \rightarrow 2) \circ (2 \rightarrow 2) = (1 \rightarrow 2)$$

$$(1 \rightarrow 3) \circ (3 \rightarrow 3) = (1 \rightarrow 3)$$

$$(2 \rightarrow 1) \circ (1 \rightarrow 1) = (2 \rightarrow 1)$$

$$(2 \rightarrow 2) \circ (2 \rightarrow 2) = (2 \rightarrow 2)$$

$$(2 \rightarrow 3) \circ (3 \rightarrow 3) = (2 \rightarrow 3)$$

$$(3 \rightarrow 1) \circ (1 \rightarrow 1) = (3 \rightarrow 1)$$

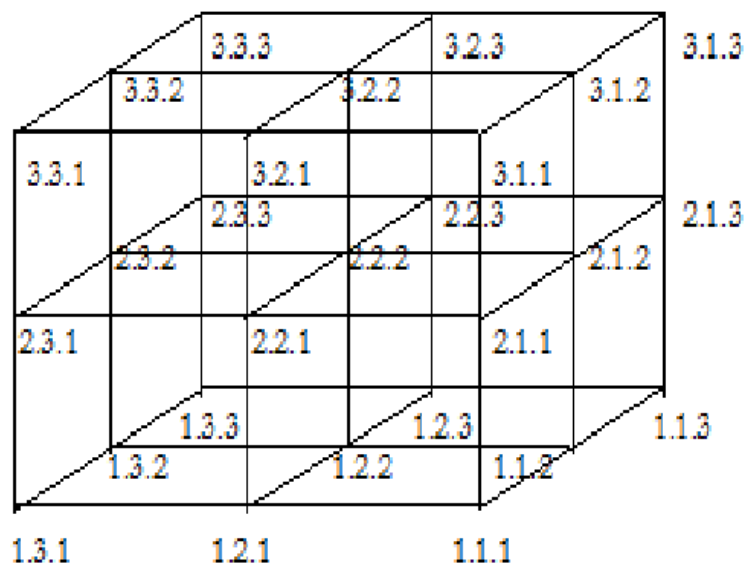
$$(3 \rightarrow 2) \circ (2 \rightarrow 2) = (3 \rightarrow 2)$$

$$(3 \rightarrow 3) \circ (3 \rightarrow 3) = (3 \rightarrow 3).$$

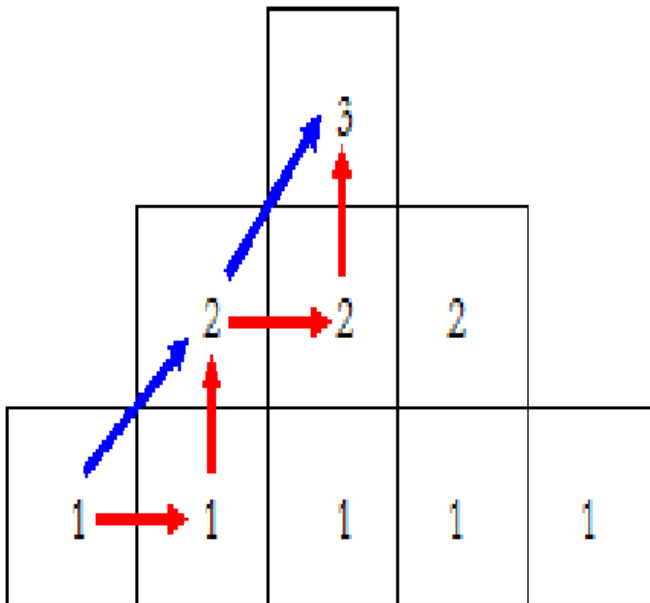
2. Nun ist es aber so, dass die Bi-Spur allgemein genug ist zur Definition 3-dimensionaler Subzeichen, wie sie für den sog. Stiebingschen Zeichenkubus verwendet werden (vgl. z.B. Toth 2008a). Ein 3-dimensionales Subzeichen hat die allgemeine Form

$$3\text{-SZ} = (a.b.c),$$

wobei a die Dimensionszahlen  $\in \{1, 2, 3\}$  sind, b die triadischen Haupt- und c die trichotomischen Stellenwerte (vgl. Stiebing 1978, S. 77):



### 3. Nimmt man nun das in Toth (2009b) eingeführte Treppenmodell



dann entspricht der rot eingezeichnete Pfad dem Aufbau der triadischen Hauptrelation, d.h. der triadischen Peirce-Zahlen-Reihe

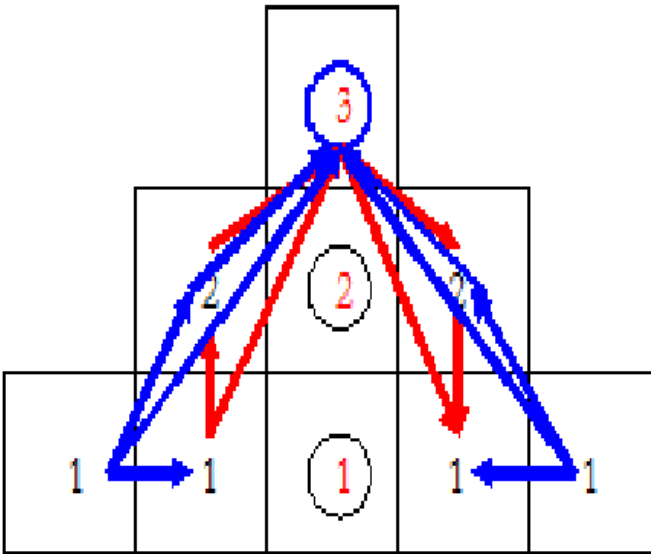
$$\text{TdP} = ((1) \rightarrow ((1 \rightarrow 2) \rightarrow (2 \rightarrow 3))),$$

während der blaue, direkte Pfad das 3-dimensionale Subzeichen (a.b.c) mit  $\text{dim}(a) = 1$ ,  $\text{TdP}(b) = 2$  und  $\text{TtP}(c) = 3$  darstellt. Somit korrespondieren also 3-dimensionales Subzeichen-Modell, Treppenmodell und Spurenmodell.

Will man nun die ersten Subzeichen des Stiebingschen Zeichenkubus mit Hilfe des Treppenmodells darstellen, kann man dies z.B. folgendermassen tun: rot eingezeichnet sind die Subzeichen, denn man kann ja 3-dimensionale Primzeichen als

$$3\text{-SZ} = (a.(b.c)),$$

d.h. als Einbettung einer Dimensionszahl a in eine dyadische Subzeichenrelation, bestimmen:



Rot ist also der Aufbau der Subzeichen im Treppenmodell, und zwar nach nicht-dualen (links) und dualen (rechts) getrennt. Selbstduale Subzeichen sind eingekreist.. In blau sind die Verbindungen zwischen den Dimensionszahlen und den 9 möglichen Subzeichen.

4. Nun kann man natürlich in 3-dimensionalen Zeichenklassen der allgemeinen Form

$$3\text{-Zkl} = (a.3.b) (c.2.d) (e.1.f), \text{ mit } a, c, e \in \dim(Z) \text{ und } b, d, f \in \{.1, .2, .3\} = \text{TtP}$$

die Dimensionen im Prinzip frei bestimmen. Nichts spricht ja a priori dagegen, dass eine Zeichenklasse z.B. gleichzeitig in 3 verschiedenen Dimensionen liegt. Allerdings kann man das Treppenmodell auch dazu benutzen, zwischen den in Toth (2008b) eingeführten adhären und inhären Dimensionszahlen zu unterscheiden. Eine **semiotische Dimensionszahl** heisst **adhärent**, wenn gilt

$$\dim(Z) = \text{TdP},$$

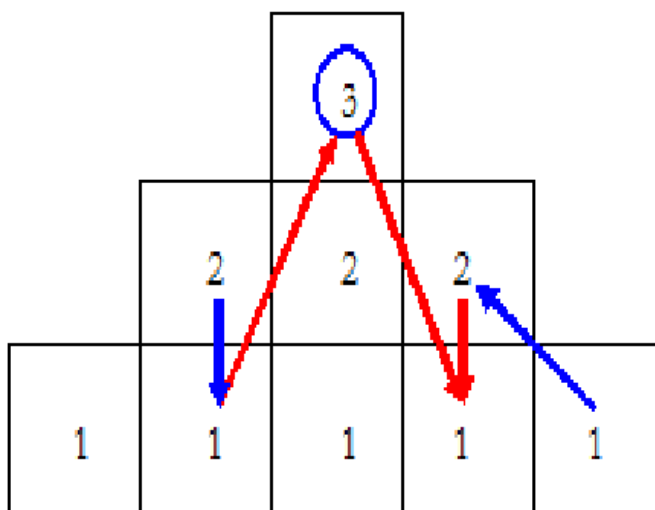
und sie heisst **inhärent**, wenn gilt

$\dim(Z) = \text{TtP}$ .

In einer 3-dim-Zeichenklasse wie z.B.

(3.3.1) (1.2.1) (2.1.3)

ist dann  $\dim(3) = \text{TdP}$ ,  $\dim(1) = \text{Ttp}$ ,  $\dim(2) \neq \text{TdP} \wedge \dim(2) \neq \text{TtP}$ . Diese Zeichenklasse sieht also mit dem Treppenmodell dargestellt wie folgt aus:



## Bibliographie

Stiebing, Hans Michael, Zusammenfassungs- und Klassifikationsschemata von Wissenschaften und Theorien auf semiotischer und fundamentalkategorialer Basis. Diss. Stuttgart 1978

Toth, Alfred, Entwurf einer dreidimensionalen Präsemiotik. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2008a

Toth, Alfred, Inhärente und adhärente Dimensionszahlen bei Zeichenklassen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2008b

Toth, Alfred, Eine einheitliche Begründung der Semiotik auf der Basis von Bi-Spuren. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009a

Toth, Spur, Bi-Spuren und dreidimensionale Primzeichen. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2009b

### 38. Zweierlei Arten semiotischer Spuren

1. Spuren sind eine besondere Art von Zeichen, denn sie sind nicht bewusst gesetzt, und somit stellt ihre thetische Einführung eigentlich einen Unfall dar, denn aufgrund von Spuren kann jemand z.B. eines Verbrechens überführt werden. Als „Reste“ werden sie von Max Bense (1979) mit den natürlichen Zeichen zusammengebracht. Auf den ersten Blick scheint dies richtig zu sein: Denn, so könnte man argumentieren: Ebenso wie ein bestimmtes Winterklima auf einer Fensterscheibe ein Eis-Patern als seinen (funktionalen) als Teil in Form einer Blume hinterlässt, hinterlässt jemand auf, an oder neben einem Gegenstand als Teil seiner z.B. einen Fingerabdruck, ein Haar, sein Feuerzeug oder dgl. Der wesentliche Unterschied zwischen Spuren und natürlichen Zeichen besteht aber natürlich darin, dass letztere im Grunde gar keinen Sender haben – denn es wäre sinnlos, auf Grund der Eisblume ihren „Urheber“ zu rekonstruieren, während bei einer Spur zwar kein intentionaler, aber doch ein effektiver Sender vorhanden ist. Spuren sind demnach nicht-intentional gesetzte künstliche Zeichen, deren Träger in der pars-pro-toto-Relation zu ihrem Objekt stehen, während natürliche Zeichen nicht-gesetzte natürliche Zeichen sind, deren Träger ebenfalls in einer pars-pro-toto-Relation zu ihrem Objekt stehen.

2. Während es m.W. sonst von keinem Zeichen zwei Arten gibt, gibt es solche von Spuren, nämlich innerhalb der Unterscheidung von **Spuren als Objektteilen** und **Spuren als Subjektkopien**.

2.1. Spuren als Objektteile entstehen dadurch, dass man das Objekt  $\Omega$  als Summe kleinerer Bestandteile  $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n$  betrachtet. Eine Spur ist dann jedes

$\omega_1 \in \Omega_j$ .

2.2. Spuren als Subjektkopien entstehen z.B. dann, wenn jemand seinen Fingerabdruck auf einem Objekt hinterlässt. Da nur solche Spuren als Subjektkopien interessant sind, welche das Subjekt eindeutig (und das heisst nicht nur einen Teil von ihm) identifizieren, gilt:

$$\Sigma_i + \Omega_j \rightarrow \Sigma_i + (\Sigma_i + \Omega_j).$$

Wir haben also im 1. Fall einen realen Teil eines Objektes und im zweiten Fall ein „subjekt-imprägniertes“ Objekt als Spur. Diese beiden Fälle werden also bei der Rekonstruktion z.B. eines Verbrechens einer Semiose zugeführt:

$$\omega_1 \in \Omega_j \rightarrow ZR$$

$$\Sigma_i + \Omega_j \rightarrow \Sigma_i + (\Sigma_i + \Omega_j) \rightarrow ZR$$

Im ersten Fall besteht also die Semiose darin, vom Teil des Objektes her das ganze Objekt zu erschliessen, während die Semiose im zweiten Fall darin besteht, vom Teil des Subjektes her das ganze Subjekt zu erschliessen. Im ersten Fall liegt also eine Objekt-rekonstruktive und im zweiten Fall eine Subjekt-rekonstruktive Semiose vor.

### **Bibliographie**

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

### **39. 2 Arten von Spuren**

1. Die erste Art von Spur ist ein Teil eines Objektes, das an, auf oder neben einem anderen Objekt zurückbleibt:

$$Sp1 = \{x \mid x \in OR_1 \wedge x \in U(O_2)\}$$

Dabei geschieht also mit dem ursprünglichen Objekt

$$OR_1 = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_n) \mid \omega_i = OR_1 - \omega_i.$$

Das Objekt wird also verringert – möglicherweise nur um einen mikroskopischen Teil (vgl. die Methoden der Kriminaltechnik).

2. Bei der zweiten Art von Spur wird das Objekt nicht quantitativ, sondern qualitativ verändert – mitunter aber nicht dauerhaft und kehrt mitunter ohne intentionales Zutun wieder zu seinem ursprünglichen Zustand zurück. Dieser Fall liegt z.B. vor bei Abdrücken im Sand, bei einem Fingerabdruck auf einer Oberfläche, usw. Hier gilt also (rein quantitativ)

$$OR_1 + \omega_i = OR_1.$$

Wenn die Spur also verschwindet, gilt insbesondere der Gleichungstypus „Vom Winde verweht“:

$$(\omega_i \rightarrow 0) \rightarrow OR_1 = OR_1.$$

### **Bibliographie**

Toth, Alfred, Inferenz und Referenz. In: Electronic Journal of Mathematical Semiotics, 2010